

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY, UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

Jean-Marie NOPPE



1^{re} THÈSE : Modèle plastique de fatigue en chargement de traction-compression.

2^e THÈSE : Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 10 juin 1970 devant la Commission d'Examen.

MM. R. MAZET Président

G. SAADA

G. COUPRY

Y. MORCHOISNE

} Examineurs.

O. N. E. R. A.

29, Avenue de la Division Leclerc,
92 CHATILLON

1971

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY, UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

Jean-Marie NOPPE



1^{re} THÈSE : Modèle plastique de fatigue en chargement de traction-compression.

2^e THÈSE : Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 10 juin 1970 devant la Commission d'Examen.

MM. R. MAZET Président

G. SAADA

G. COUPRY

Y. MORCHOISNE

} Examineurs.

O. N. E. R. A.

29, Avenue de la Division Leclerc,
92 CHÂTILLON

1971



REMERCIEMENTS

Nous présentons nos plus vifs remerciements à tous ceux qui nous ont permis, par leur aide et leurs conseils, de présenter ce travail :

Monsieur le Professeur R. MAZET par son enseignement et son exemple m'a initié à la Mécanique des solides et m'a permis de préparer cette thèse à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales.

Monsieur le Professeur G. SAADA s'est intéressé à ce travail et a bien voulu faire partie du Jury.

Monsieur G. COUPRY, Directeur Scientifique à l'O.N.E.R.A., m'a permis de poursuivre cette thèse.

Monsieur Y. MORCHOISNE m'a constamment conseillé et encouragé.

Enfin toute l'équipe de plasticité, sous la direction de Messieurs VALID et LEMAITRE, au sein de laquelle j'ai pu effectuer ce travail dans les meilleures conditions.

TABLE DES MATIÈRES

Pages :

RÉSUMÉ	3
INTRODUCTION	4
I - ASPECTS MICROSCOPIQUES DE LA FATIGUE	4
I,1. Hétérogénéité de la déformation des polycristaux	4
I,2. Quelques aspects des micromécanismes de la fatigue	5
II - SCHÉMATISATION DE LA STRUCTURE D'UN MATÉRIAU	5
II,1. Notion de contrainte dans un milieu microscopiquement hétérogène	5
II,2. Définition de la déformation	7
II,3. Notion de relation contraintes-déformations dans un milieu hétérogène	7
II,4. Définition de l'élément de volume d'un milieu microscopiquement hétérogène	7
II,5. Structure d'un matériau microscopiquement hétérogène	8
III - DÉTERMINATION DES CONTRAINTES MICROSCOPIQUES ET EXPRESSION DES COURBES D'ÉCROUISSAGE	9
III,1. Détermination des contraintes microscopiques d'un milieu hétérogène	9
III,1.1. Liaison avec le milieu continu	9
III,1.2. Cas d'un champ $\Phi(y, t)$ constant en x	10
III,2. Relation contraintes-déformations en traction de l'élément de volume	10
III,2.1. Forme de la courbe de traction de l'élément de volume	10
III,2.2. Relation: contraintes-déformations de type plastique pour l'élément de volume	11
III,3. Expression de la courbe d'érouissage d'une éprouvette de traction	12
III,3.1. Structure d'une éprouvette de traction	12
III,3.2. Expression de la courbe d'érouissage d'une éprouvette	12
III,4. Densité de probabilité du paramètre de répartition des contraintes microscopiques	13
III,4.1. Mesure des déformations microscopiques d'une éprouvette de traction	13
III,4.2. Hypothèse de normalité de la distribution du paramètre V	13
III,5. Détermination des paramètres caractéristiques d'une courbe d'érouissage	15
III,5.1. Expression d'une courbe d'érouissage dans le cas d'une distribution gaussienne de V	15
III,5.2. Détermination des coefficients	15
III,5.3. Comparaison avec les courbes expérimentales	16
III,6. Influence de la fatigue sur la répartition des contraintes microscopiques	17
III,6.1. Description des essais réalisés	18
III,6.2. Variations du module d'élasticité	19
III,6.3. Variations des caractéristiques plastiques	20
III,6.4. Conclusion	24
IV - DOMMAGE EN CHARGEMENT DE TRACTION-COMPRESSION	25
IV,1. Définition et hypothèses fondamentales	25
IV,2. Loi de variation du paramètre de dommage dans un élément de volume	26
IV,2.1. Hypothèse de base	26
IV,2.2. Cas de plasticité	26
IV,2.3. Hypothèse de linéarité	27
IV,2.4. Lois de variation de la distribution de dommage dans un élément de volume	28
IV,3. Variation de la distribution de dommage dans un élément de volume pour un trajet de charge donné	30
IV,3.1. Cas d'un cycle de charge	30
IV,3.2. Cas de n cycles à amplitude constante	32

V - RUPTURE EN CHARGEMENT RÉPÉTÉ DE TRACTION-COMPRESSION	34
V,1. Recherche de l'élément de volume le plus défavorisé	34
V,2. Critère de rupture d'un élément de volume	35
V,3. Rupture d'une éprouvette de traction compression	36
VI - APPLICATIONS	37
VI,1. Courbe de Wöhler	37
VI,2. Influence de la contrainte moyenne	37
VI,3. Influence d'un écrouissage préalable	37
VI,4. Non commutativité du dommage	37
VI,5. Effet de dimensions	38
CONCLUSION	39
ANNEXE	40
RÉFÉRENCES	41



MODÈLE PLASTIQUE DE FATIGUE EN CHARGEMENT DE TRACTION-COMPRESSION

par Jean-Marie NOPPE

RÉSUMÉ

Pour rendre compte du comportement en fatigue des matériaux métalliques, deux paramètres, répartis statistiquement dans la structure étudiée, ont été introduits.

La contrainte, premier paramètre, est supposée répartie à une échelle moins fine que le «dommage», deuxième paramètre.

Les variations des caractéristiques de ces deux répartitions sont déterminées en fonction des charges appliquées.

A l'aide de la courbe d'écrouissage, une précision de la rupture est obtenue dans le domaine élasto-plastique.

La représentativité des lois proposées a été confrontée avec certains résultats expérimentaux obtenus.

Descripteurs (thésaurus CEDOCAR) : Métaux - Plasticité - Fatigue mécanique - Déformation plastique - Point rupture - Distributions statistiques - Propagation criques.



PLASTIC FATIGUE MODEL WITH TRACTION-COMPRESSION LOADING

SUMMARY

In order to describe the fatigue behaviour of metallic materials two parameters, statistically distributed within the structure under study, have been introduced.

The stress, the first parameter, is assumed to be distributed at a less fine scale than the 'damage', the second parameter.

The variations of the characteristics of these two repartitions are determined as a function of the applied loads.

With the help of the plastic deformation curve, the rupture point is precisely obtained in the elastoplastic range.

The validity of the proposed laws has been assessed against a number of experimental results.

Descriptors (NASA thesaurus) : Fatigue (materials) - Plastic deformation - Plastic properties - Elastoplasticity - Statistical distributions - Mathematical models - Metal fatigue - Crack initiation - Crack propagation - Rupturing.

INTRODUCTION

Il semble inutile d'insister sur l'intérêt des recherches en fatigue, si nous rappelons que les industriels estiment que plus de 95 % des ruptures en service sont des ruptures de fatigue. Malgré le nombre impressionnant des travaux dans ce domaine, les ingénieurs sont assez embarrassés lorsqu'il s'agit de «dimensionner» des pièces soumises à des chargements cycliques. En effet, si en premier lieu, le chargement réel est assez mal connu, les théories de la fatigue sont en général d'abord et d'exploitation assez difficiles. Il reste l'expérimentation systématique, procédé sûr mais peu satisfaisant intellectuellement et surtout financièrement.

Sans prétendre apporter une solution définitive, nous avons pensé qu'un modèle de fatigue, s'appuyant sur des considérations microscopiques, en particulier l'hétérogénéité des matériaux, mais aboutissant à des formules relativement simples et rendant compte de quelques effets caractéristiques du phénomène de fatigue, pouvait permettre de prévoir le comportement d'un matériau dans de nombreux cas, à partir d'un nombre relativement restreint d'essais classiques.

Ce travail propose donc, après quelques remarques tirées de travaux étudiant les micromécanismes de la déformation et de la fatigue, un schéma de la structure d'un matériau microscopiquement hétérogène, basé essentiellement sur une répartition de contraintes dites «microscopiques». La détermination de cette répartition à partir du champ des contraintes calculé en considérant le matériau continu et l'adoption d'une loi de comportement en traction de l'élément de volume, permet de rendre compte assez correctement des courbes dites «d'écrouissage».

Si nous introduisons un paramètre de dommage à l'échelle locale, l'étude de la variation de sa répartition dans un élément de volume conduit, à l'aide de certaines hypothèses et d'un critère de rupture, à des formules exprimant le nombre de cycles à rupture d'un élément de volume, puis d'une éprouvette, en fonction des caractéristiques du chargement.

Bien qu'il n'existe pas pour l'instant de vérifications expérimentales complètes de ce modèle, les relations obtenues semblent pouvoir rendre compte de certains effets caractéristiques du phénomène de fatigue et en particulier :

- ┌ Courbes de Wöhler classiques
- ├ Influence de la contrainte moyenne
- ├ Influence d'un écrouissage préalable
- ├ Non commutativité du dommage
- └ Effet des dimensions.

I - ASPECTS MICROSCOPIQUES DE LA FATIGUE

Le phénomène dit de «fatigue», dû à la répétition de cycles de charge et de décharge, consiste en la détérioration progressive de la continuité d'un matériau pour aboutir à la formation de fissures macroscopiques et enfin à la séparation finale. Si macroscopiquement, la fatigue d'un matériau est peu apparente, c'est-à-dire en particulier, qu'il n'y a généralement pas déformation permanente globale, l'étude microscopique permet d'observer des mécanismes qui présentent certaines analogies avec les mécanismes de la déformation unidirectionnelle. Les quelques remarques qui suivent, concernant la déformation et la fatigue des polycristaux, nous ont guidés dans l'élaboration de ce modèle.

1,1. Hétérogénéité de la déformation des polycristaux [12]

Des observations de la déformation des polycristaux, il résulte que les lignes de glissement se développent comme dans le cas des monocristaux, suivant plusieurs systèmes qui couvrent l'ensemble des grains et se raccordent par des glissements déviés. Mais au cours de la déformation d'échantillons polycristallins, chaque grain ne subit pas une déformation égale à la déformation de l'ensemble. Cette hétérogénéité dans la déformation se révèle déjà à l'observation des bandes de glissement qui apparaissent à la surface des éprouvettes [1]. D'autre part, des essais de dureté à travers les grains d'une éprouvette polycristalline d'aluminium ont montré que si la dureté était initialement homogène, après déformation unidirectionnelle, il existe des variations im-

portantes entre les grains et à l'intérieur des grains eux-mêmes [2]. Par des attaques et des polissages successifs, on peut constater que l'hétérogénéité de la déformation est du même ordre, à l'intérieur ou à la surface des échantillons, dans un même grain, le système de glissement peut changer d'un point à un autre et une déformation hétérogène d'un grain entraîne une anomalie dans le voisin [3]. Nous n'insisterons pas davantage sur l'hétérogénéité des déformations en chargement unidirectionnel et nous donnerons quelques remarques concernant les micromécanismes de la fatigue.

1.2. Quelques aspects des micromécanismes de la fatigue

Pour la plupart des métaux, des déformations plastiques avec formation de lignes de glissement ont lieu durant le chargement de fatigue. Il y a toutefois une différence marquée entre l'apparence des lignes de glissement produites lors de la déformation unidirectionnelle et lors d'un chargement de fatigue. Avec l'accroissement de la déformation, dans un essai de traction, des lignes de glissement apparaissent entre les lignes déjà existantes mais sans grand changement d'aspect alors que, durant un chargement cyclique, après une période initiale très courte durant laquelle apparaissent des lignes de glissement, les modifications ultérieures consistent en l'épaississement de certaines de ces lignes en bandes de glissement [4]. Ces bandes de glissement sont réparties de façon très irrégulière à l'intérieur même des grains et si certains présentent peu de bandes de glissement, d'autres sont très marquées par des bandes épaisses.

Des nombreuses études des déformations en fatigue, il semble que le phénomène de fatigue soit dû à la non-homogénéité locale des agrégats polycristallins, amplifiée par le chargement cyclique. Ces hétérogénéités créent des régions d'incompatibilité de déformation au voisinage des joints ou des sous-joints de grains [5].

D'autre part, certains auteurs [6] ont observé un processus systématique de destruction, lors de chargements cycliques, qui commence par la formation de pores ou de vides dans les régions d'incompatibilité de déformation. La réunion de ces pores conduit alors à la formation de criques à l'état embryonnaire. Ce phénomène dépend dans ses détails de l'amplitude du chargement. Pour les grandes amplitudes, les pores se forment principalement aux sous-joints séparant des sous-grains d'orientation très différente; sous-joints produits dans les grains par des déformations importantes; ces pores se réunissent en micro-criques de forme irrégulière. Aux faibles amplitudes, les pores se forment particulièrement sur les plans de glissement et conduisent à la formation de plans de glissement fissurés. Aux amplitudes voisines de la limite de fatigue du matériau, le nombre de ces pores reste toujours faible et ne conduit pas à la formation de fissures de dimensions importantes qui pourraient conduire à la fissuration macroscopique du matériau.

II - SCHÉMATISATION DE LA STRUCTURE D'UN MATÉRIAU

Les quelques remarques précédentes, concernant les micromécanismes de la déformation et de la fatigue, montrent, en particulier, que l'hétérogénéité microscopique des matériaux est à l'origine des phénomènes de fatigue. La notion habituelle de milieu continu semble, dans ce cas, peu adaptée et il paraît intéressant d'introduire la notion de milieu microscopiquement hétérogène. Cette notion a d'ailleurs déjà été utilisée dans certains travaux concernant aussi bien la déformation [7 - 8 - 9] que la fatigue des métaux [10 - 11]. Nous allons d'abord essayer de définir les notions fondamentales de contrainte, déformation, relation contraintes-déformations dans le cas d'un milieu microscopiquement hétérogène. Ensuite, certaines hypothèses nous conduiront à un schéma de milieu microscopiquement hétérogène d'un type particulier.

II.1. Notion de contrainte dans un milieu microscopiquement hétérogène

Dans la théorie des milieux continus, la contrainte est un point $M(\vec{x})$ suivant une direction $\vec{n}$ est considérée comme la densité superficielle des efforts internes agissant sur une surface ΔS normale à $\vec{n}$ et contenant M , c'est-à-dire que si $\vec{F}$ est la résultante en M des efforts internes agissant sur ΔS ;

$$(2.1) \quad \vec{T}(\vec{n}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{\Delta S}$$

$\vec{T}(\vec{n})$ est appelée la contrainte au point $M(\vec{x})$ suivant la direction $\vec{n}$. Un tenseur dit tenseur des contraintes en M permet de connaître la contrainte suivant une direction quelconque :

$$(2.2) \quad \vec{T}(\vec{n}) = \mathbb{T} \vec{n}$$

ou dans une base donnée :

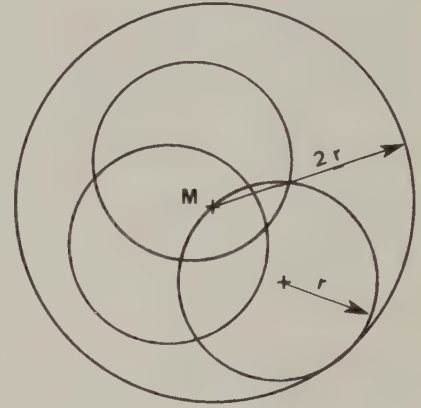
$$T_i = t_{ij} n_j$$

Mais cette définition est établie dans le cas du concept de milieu continu, or physiquement la discontinuité de la matière ne permet pas le passage à la limite.

En effet, lorsque $\Delta S < \zeta^2$, la matière ne peut plus être considérée comme continue et $\vec{T}$ est mal définie à l'échelle atomique.

Mais lorsque $\Delta S \gg \zeta^2$, la valeur de $\frac{\Delta F}{\Delta S}$ peut dépendre de l'élément d'aire choisi (même si dans le cas du milieu continu, la contrainte a pu être considérée comme constante).

Considérons donc un volume V de matériau, dans lequel si nous supposons le milieu continu, la contrainte est constante. Dans le cas d'un matériau hétérogène, la contrainte en un point $M(\vec{x})$ suivant une direction $\vec{n}$ peut être considérée comme la densité superficielle des efforts agissant sur un élément de surface circulaire de rayon r , dans le plan orthogonal à $\vec{n}$ et contenant M .



Considérons l'ensemble de ces cercles (fig. 1) :

$$\mathcal{C}_{r,M} [C | r(c)=r, M \in C]$$

pour chacun de ces cercles, il est possible de définir la densité superficielle des efforts internes :

$$(2.3) \quad \vec{T} = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S}$$

Ainsi, pour chaque valeur de r , nous pouvons tracer la densité de probabilité de la contrainte autour de M et suivant la direction $\vec{n}$ (fig. 2).

En réalité, il faudrait envisager les neuf composantes de la contrainte suivant trois directions orthogonales, mais nous ne ferons le raisonnement que pour une seule de ces composantes t_{ij} .

De plus, pour chaque valeur de r , attribuons à chaque point du volume considéré, une valeur unique σ_{ij} de la contrainte égale à la contrainte t_{ij} , moyenne de la densité de probabilité de t_{ij} autour de M (si l'on admet que cette densité peut être définie par sa moyenne $\bar{t}_{ij}$ et son écart quadratique $\bar{\sigma}_{ij}$).

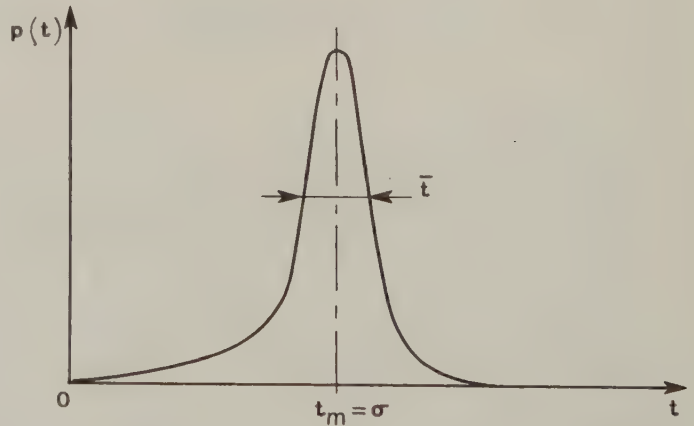
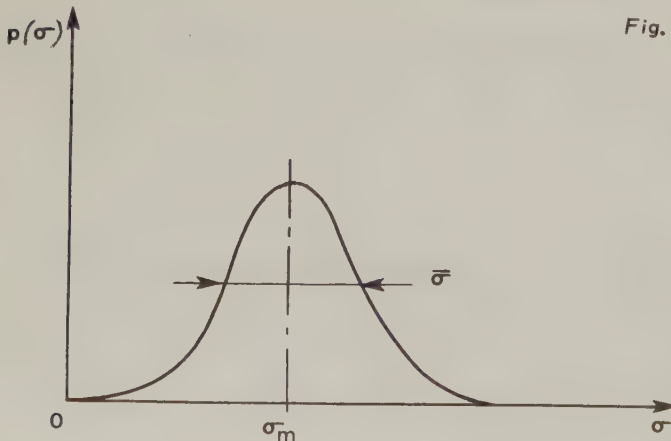


Fig. 2 - Densité de probabilité de la contrainte t autour d'un point M pour une dimension r .



Nous pouvons alors tracer la densité de probabilité de σ_{ij} dans le volume total, densité que nous supposons définie par son écart quadratique $\bar{\sigma}_{ij}$ et sa moyenne $\bar{\sigma}_{ij}$ (fig. 3). Observons maintenant les variations des écarts quadratiques $\bar{\sigma}_{ij}$ et $\bar{\sigma}_{ij}$, des deux densités de probabilité lorsque r varie :

Fig. 3 - Densité de probabilité de la contrainte σ dans un volume V pour une dimension r

Pour $\nu < \zeta$, la dispersion des τ_{ij} est grande car la matière n'est plus continue.

Pour $\nu > \zeta$, nous rechercherons une dimension ν pour laquelle $\bar{\tau}_{ij}$ est faible alors que $\bar{\sigma}_{ij}$ ne peut être négligé.

11.2. Définition de la déformation

La définition de la déformation pose aussi un problème de continuité, car il faut considérer que le déplacement $\vec{u}$ d'un point $M(\vec{x})$ est une fonction continue de $\vec{x}$, ainsi que sa dérivée première.

Dans le cas d'un milieu hétérogène, la discontinuité de la matière à l'échelle atomique ne permet pas le passage à la limite. Nous savons que le tenseur de déformation $\mathcal{E}$ en un point M , constitue la partie symétrique du tenseur gradient $\nabla \vec{u}$ du champ de vecteurs déplacement $\vec{u}(M)$ défini par :

$$(2.4) \quad (\nabla \vec{u})_{MM'} = U(M') - U(M) + \text{termes du 2}^{\text{e}} \text{ ordre}$$

quand $\overrightarrow{MM'} \rightarrow 0$

M' étant un point voisin de M .

Lorsque $|\overrightarrow{MM'}| < \zeta$ il n'est pas possible de définir $\nabla \vec{u}$, par suite de la discontinuité de la matière à cette échelle.

Lorsque $|\overrightarrow{MM'}| > \zeta$, $\nabla \vec{u}$ peut dépendre du point M' choisi autour de M .

Pour une distance $|\overrightarrow{MM'}| = \nu$ donnée en faisant varier le point M' , nous pouvons tracer la densité de probabilité des composantes du tenseur des déformations e_{ij} .

Nous supposons que quelle que soit l'échelle considérée, les écarts quadratiques des densités de probabilité $\bar{e}_{ij}$ sont négligeables et que le tenseur des déformations peut être défini par les moyennes de ces densités de probabilité :

$$\mathcal{E}_{ij} = \bar{e}_{ij}$$

11.3. Notion de relation contraintes-déformations dans un milieu hétérogène

La loi reliant les contraintes et les déformations dans un « milieu continu » est constante dans le volume du matériau et peut s'écrire d'une manière assez générale :

$$(2.5) \quad \mathcal{G}(\tau_{ij}, \dot{\tau}_{ij}, e_{ij}, \dot{e}_{ij}) = 0$$

Or, l'observation des mécanismes microscopiques de la déformation montre que cette relation varie vraisemblablement suivant le point considéré et la dimension de l'élément choisie.

Si nous considérons l'ensemble des sphères de rayon ν et contenant le point M , où l'on veut définir la relation contraintes-déformations :

$$(2.6) \quad \mathcal{L}_{r,M} [S \mid r(S) = r, MES]$$

Pour chacune de ces sphères, il est possible de définir la loi reliant les contraintes et les déformations :

$$(2.7) \quad \mathcal{f}(\tau_{ij}, \dot{\tau}_{ij}, e_{ij}, \dot{e}_{ij}) = 0$$

Ainsi, pour chaque valeur de ν , nous pouvons tracer les densités de probabilités des paramètres $\mathcal{f}_i$ définissant la fonction $\mathcal{f}$, densités que nous supposons définies par leurs moyennes $\bar{\mathcal{f}}_i^m$ et leurs écarts quadratiques $\bar{\mathcal{f}}_i$. Si de plus, pour chaque valeur de ν , nous attribuons à chaque point du volume, une fonction unique F définie par les paramètres F_i égaux aux moyennes $\bar{\mathcal{f}}_i^m$ des densités de probabilités respectives, nous pouvons alors tracer les densités de probabilités des F_i dans le volume total, densités définies par leurs moyennes $\bar{F}_i^m$ et leurs écarts quadratiques $\bar{F}_i$.

Observons maintenant, les variations des écarts quadratiques $\bar{\mathcal{f}}_i$ et $\bar{F}_i$ et cherchons une valeur de ν , pour laquelle $\bar{F}_i$ est négligeable.

11.4. Définition de l'élément de volume d'un milieu microscopiquement hétérogène

Nous allons définir un milieu hétérogène particulier dans lequel l'élément de volume sera de dimension ν , telle que la dispersion $\bar{\tau}_{ij}$ de la contrainte pourra y être considérée comme négligeable pendant que la dispersion $\bar{F}_i$ de la relation contraintes-déformations dans le volume total du matériau sera elle aussi négligeable.

Dans ce cas, la dispersion $\overline{\sigma}_{ij}$ de la contrainte dans le volume total ne sera pas négligeable ainsi que la dispersion $\overline{\epsilon}_{ij}$ des paramètres de la relation contraintes-déformations dans l'élément de volume.

Si elle existe, cette dimension peut dépendre du point M considéré mais il est possible de définir une dimension moyenne $\overline{\nu}_m$ en faisant varier le point M . Donc :

HYPOTHÈSE :

Il existe une dimension $\overline{\nu}_m$ de l'élément de volume du milieu microscopiquement hétérogène, telle que les $\overline{\sigma}_{ij}$ et les $\overline{\epsilon}_{ij}$ soient négligeables.

Physiquement, cette dimension peut être celle d'un agrégat de quelques grains qui, du point de vue de la relation contraintes-déformations représente sensiblement l'ensemble du matériau, mais qui par la présence de sur-tensions locales est soumis à des efforts différents selon l'agrégat considéré mais constants dans le volume de l'agrégat.

DÉFINITION

L'élément de volume du milieu microscopiquement hétérogène est un « petit cube » de dimensions de l'ordre de $\overline{\nu}_m$, dans lequel le tenseur des contraintes est constant et dont la relation globale contraintes-déformations est identique quel que soit l'élément de volume considéré d'un même matériau, la loi locale étant distribuée dans le volume de cet élément.

II,5. Structure d'un matériau microscopiquement hétérogène

HYPOTHÈSE

Un volume fini (V) d'un matériau microscopiquement hétérogène sera considéré comme l'assemblage d'un nombre fini N d'éléments de volume semblables à celui défini précédemment.

Cette schématisation propose un modèle où les contraintes et les déformations ne sont définies que d'une façon discontinue. Nous ne nous posons donc pas, à cette échelle, les problèmes de continuité de la contrainte ni de compatibilité des déformations. Nous verrons plus loin la liaison entre le milieu continu et ce milieu dit « microscopiquement hétérogène ».

SCHÉMA DE LA STRUCTURE D'UN MATÉRIAU MICROSCOPIQUEMENT HÉTÉROGÈNE

Grandeurs	$c(r,M)$	$\mathcal{C}(r,M)$	Elément de vol.	Volume (V)
Contrainte	$t_{ij} \rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} \overline{t}_{ij} \\ t_{ij}^m \end{array} \right. \rightarrow$	$= \sigma_{ij} \rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\sigma}_{ij} \\ \sigma_{ij}^m \end{array} \right.$
Déformation	$e_{ij} \rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} \overline{e}_{ij} \\ e_{ij}^m \end{array} \right. \rightarrow$	$= \epsilon_{ij}$	
Relation Contraintes- déformations	$f_i \rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} \overline{f}_i \\ f_i^m \end{array} \right. \rightarrow$	$= F_i \rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} \overline{F}_i \\ F_i^m \end{array} \right.$

SCHÉMA SIMPLIFIÉ

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{t}_{ij} = 0 \\ \overline{e}_{ij} = 0 \\ \overline{F}_i = 0 \end{array} \right.$$

Grandeurs	$c(r,M)$	$\mathcal{C}(r,M)$	Elément de vol.	Volume (V)
Contrainte	σ_{ij}	σ_{ij}	$\sigma_{ij} \rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\sigma}_{ij} \\ \sigma_{ij}^m \end{array} \right.$
Déformation	ϵ_{ij}	ϵ_{ij}	ϵ_{ij}	
Relation Contraintes- Déformations	$f_i \rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} \overline{f}_i \\ f_i^m \end{array} \right. \rightarrow$	$= F_i$	F_i

III - DÉTERMINATION DES CONTRAINTES MICROSCOPIQUES ET EXPRESSION DES COURBES D'ÉCROUISSAGE

Nous allons essayer de définir la répartition des contraintes microscopiques du milieu hétérogène, à partir du champ des contraintes calculé comme si le milieu était continu.

Dans le cas de la traction simple, une forme particulière de répartition des contraintes microscopiques et une relation contraintes-déformations de l'élément de volume permettent de rendre compte assez correctement des courbes dites « d'écrouissage ».

III,1. Détermination des contraintes microscopiques d'un milieu hétérogène

III,1.1. Liaison avec le milieu continu

Considérons un volume (V) d'un matériau qui a été soumis à une histoire $F(\vec{y}, t)$ des efforts extérieurs. Nous pouvons écrire qu'à l'instant t , le tenseur des contraintes microscopiques en un point $\vec{x}$ est une fonctionnelle dépendant de l'histoire des efforts extérieurs appliqués, ainsi que de $\vec{y}$, $\vec{x}$, t et t' .

$$(3.1) \quad \nabla(\vec{x}, t) = \mathcal{L} \left\{ \vec{F}(\vec{y}, t'), \vec{y}, \vec{x}, t, t' \right\}$$

pour $t' < t$.

Nous caractériserons l'histoire des efforts extérieurs par l'état du matériau au temps t , état défini par $E(t)$, non scalaire, qui représente l'état d'écrouissage, d'endommagement, etc... du matériau :

$$(3.2) \quad \nabla(\vec{x}, t) = \mathcal{L} \left\{ E(t), \vec{F}(\vec{y}, t), \vec{y}, \vec{x} \right\}$$

D'autre part, nous supposons que nous pouvons caractériser les efforts extérieurs agissant au temps t , par le tenseur des contraintes $\Phi(\vec{y}, t)$, calculé en supposant le matériau continu, c'est-à-dire en utilisant les équations classiques de la mécanique des milieux continus et la relation contraintes-déformations classique du matériau :

$$(3.3) \quad \nabla(\vec{x}, t) = \mathcal{L} \left\{ E(t), \Phi(\vec{y}, t), \vec{y}, \vec{x} \right\}$$

Pour arriver à une forme simple, nous ferons plusieurs hypothèses et tout d'abord :

HYPOTHÈSE DE LINÉARITÉ

La fonctionnelle $\mathcal{L}$ est linéaire en Φ .

C'est-à-dire que si nous supposons que Φ est constant et égal à $\Phi^*(t)$ dans un domaine $\mathcal{A}$, il existe un tenseur d'ordre 4, $\mathbb{L}$ tel que :

$$\mathcal{L} \left\{ E(t), \Phi(\vec{y}, t), \vec{y}, \vec{x} \right\} = \mathbb{L} \left\{ E(t), \vec{y}, \vec{x} \right\} \Phi^*(t)$$

Et si Φ est constant par intervalle, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{L} \left\{ E(t), \Phi(\vec{y}, t), \vec{y}, \vec{x} \right\} = \sum_i \mathbb{L} \left\{ E(t), \vec{y}, \vec{x} \right\} \Phi_i^*(t)$$

En passant au continu :

$$(3.4) \quad \nabla(\vec{x}, t) = \int_{(V)} \mathbb{L} \left\{ E(t), \vec{y}, \vec{x} \right\} \cdot \Phi(\vec{y}, t) d\vec{y}$$

Pour l'instant, notre étude se limite à des cas très particuliers, que nous étudierons dès maintenant.

III,1.2. Cas d'un champ $\Phi(\vec{y}, t)$ constant en $\vec{x}$

Dans ce cas, l'expression précédente devient :

$$(3.5) \quad \nabla(\vec{x}, t) = \int_{(V)} \mathbb{L}\{E(t), \vec{y}, \vec{x}\} d\vec{y} \cdot \Phi(t)$$

HYPOTHÈSE D'ISOTROPIE

Dans le cas d'un champ de contraintes $\Phi(\vec{x}, t)$ constant en $\vec{x}$, le tenseur des contraintes microscopiques a mêmes directions principales que le tenseur des contraintes du milieu continu $\Phi(\vec{x}, t)$.

Nous pouvons donc écrire $\mathbb{L}$ sous la forme :

$$(3.6) \quad \mathbb{L}\{E(t), \vec{y}, \vec{x}\} = \ell\{E(t), \vec{y}, \vec{x}\} \cdot \mathbb{I}$$

L'expression (3.5) devient alors :

$$(3.7) \quad \nabla(\vec{x}, t) = \int_{(V)} \ell\{E(t), \vec{y}, \vec{x}\} d\vec{y} \cdot \Phi(t)$$

Nous ne chercherons pas à expliciter davantage l'expression de l'intégrale, mais nous pouvons dire que E est une grandeur complexe dont nous ne connaissons pas les valeurs initiales.

Si nous appelons V : « PARAMETRE DE REPARTITION DES CONTRAINTES MICROSCOPIQUES », l'expression :

$$(3.8) \quad V(\vec{x}, E(t)) = \int_{(V)} \ell\{E(t), \vec{y}, \vec{x}\} d\vec{y}$$

Nous voyons que V est un paramètre dont il est difficile de connaître la répartition spatiale dans le matériau et nous ne nous attacherons qu'à étudier les caractéristiques globales de sa répartition dans un volume (V) . Les contraintes microscopiques sont donc de la forme :

$$(3.9) \quad \nabla(\vec{x}, t) = V(\vec{x}, E(t)) \cdot \Phi(t)$$

REMARQUE :

Cette forme (3.9) est telle que lorsque le tenseur des contraintes du milieu continu correspondant est nul, il n'existe pas de contraintes dites « résiduelles » à l'intérieur du matériau, mais la forme choisie n'est seulement qu'une première approximation d'une forme plus générale de l'expression des contraintes microscopiques.

III,2. Relation contraintes-déformations en traction de l'élément de volume

Physiquement, la dimension de l'élément de volume du milieu microscopiquement hétérogène, correspond à la dimension de l'aggrégat de quelques cristaux ou grains. L'analyse microscopique révèle que les déformations à l'intérieur d'un tel aggrégat ne sont pas uniformes, ni entre les grains, ni même dans les grains.

Mais ici, nous ne cherchons qu'à traduire le comportement en traction d'une éprouvette constituée d'un nombre fini d'éléments de volume. Ainsi, seule la relation globale contraintes-déformations de l'élément de volume, c'est-à-dire :

$$(3.10) \quad F(\nabla_{ij}, \dot{\nabla}_{ij}, \epsilon_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}) = 0$$

dans le cas des contraintes uniaxiales, est nécessaire.

III,2.1. Forme de la courbe de traction de l'élément de volume

De nombreux travaux ont été effectués sur la déformation des monocristaux [12] et la courbe classique de traction, à vitesse de déformation constante, d'un monocristal (en particulier d'un monocristal d'aluminium) est du type de la figure 4. Nous y reconnaissons les phases de déformation élastique, de glissement facile et d'écrouissage.

D'autre part, Fleisher et Backofen [13] ont comparé la déformation de monocristaux et de bicristaux d'aluminium. La figure 5 donne la comparaison d'un monocristal d'axe $\langle 112 \rangle$ et d'un bicristal non symétrique d'axe

commun $\langle 112 \rangle$. La présence du joint fait disparaître la phase de glissement facile sans modifier sensiblement la phase d'écrouissage.

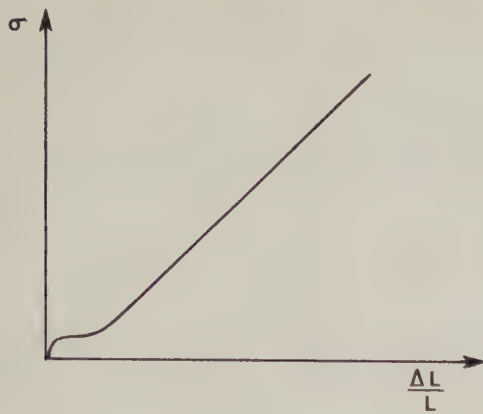


Fig. 4 - Courbe de traction d'un monocristal

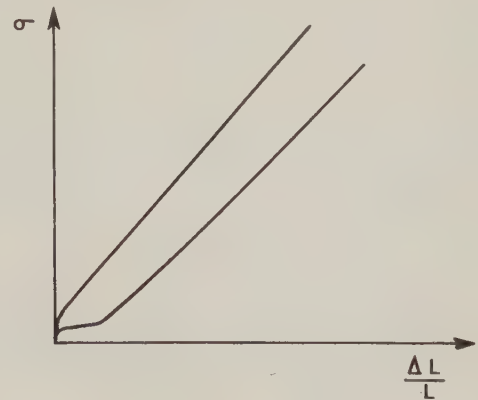
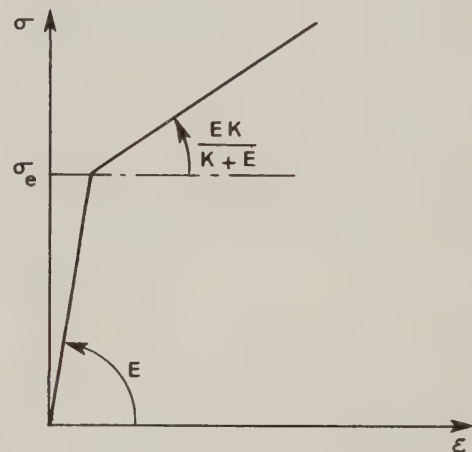


Fig. 5 - Courbe de traction d'un bicristal

Ceci nous incite à adopter, pour la forme de la courbe de traction de l'élément de volume du milieu microscopiquement hétérogène, une courbe du type de la figure 6, c'est-à-dire comportant une phase élastique et une phase d'écrouissage linéaire.

Fig. 6 - Courbe de traction de l'élément de volume



III.2.2. Relation contraintes-déformations de type plastique pour l'élément de volume

Nous avons déjà supposé, que tous les éléments de volume d'un même matériau ont une même relation contraintes-déformations globale. Nous nous plaçons délibérément dans le cas d'un matériau de type plastique, c'est-à-dire qu'en chargement de traction, la relation contraintes-déformations peut s'écrire de la manière habituelle dans le cas où $\sigma_{11} > 0$:

$$(3.11) \quad \begin{cases} \epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} & \text{pour } \sigma_{11} \leq \sigma_e \\ \epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} + \frac{1}{K} [\sigma_{11} - \sigma_e] & \text{pour } \sigma_{11} > \sigma_e \end{cases}$$

$$\text{avec } \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\nu \epsilon_{11}$$

Nous pouvons aussi décomposer la déformation ϵ en deux parties : l'une dite « déformation élastique », l'autre dite « déformation plastique » et telles que :

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{11}^e + \epsilon_{11}^p \quad \text{avec}$$

$$(3.12) \quad \epsilon_{11}^e = \frac{\sigma_{11}}{E}$$

III,3. Expression de la courbe « d'écrouissage » d'une éprouvette de traction

III,3.1. Structure d'une éprouvette de traction

Nous avons vu que la contrainte ∇_k s'appliquant sur un élément de volume k est définie par :

$$(3.13) \quad \nabla_k(t) = \phi_k(t) \cdot V_k(E(t))$$

ϕ_k étant le tenseur des contraintes sur l'élément de volume considéré, calculé dans le cas du milieu continu. En traction simple et dans l'hypothèse du milieu continu, ϕ est supposé constant dans le volume de l'éprouvette et tel que :

$$(3.14) \quad \phi_{11}(t) = \frac{F(t)}{S}$$

F est la force appliquée suivant l'axe 1, à une éprouvette de section constante S . Cette éprouvette peut être considérée comme l'assemblage d'un nombre fini n d'éléments de volume rangés en p colonnes et soumis chacun à une contrainte :

$$(3.15) \quad \nabla_{11k}(t) = \frac{F(t)}{S} \cdot V_k(E(t))$$

V_k peut varier lorsque t varie, mais nous admettrons actuellement que nous pouvons négliger la variation de V dans un essai dit « d'écrouissage », c'est-à-dire lorsque F/S croît de 0 à une valeur voisine de la « limite de rupture statique », le matériau étant initialement « vierge ».

III,3.2. Expression de la courbe d'écrouissage d'une éprouvette

Si nous considérons la déformation globale d'une colonne de longueur l , constituée de n éléments de volume de longueur $\delta x_1 = \frac{l}{n}$, nous pouvons écrire :

$$(3.16) \quad \epsilon_{11}^m = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sum_k k_k \epsilon_{11k} \delta x_1}{n \delta x_1} = \sum_k f_k \epsilon_{11k}$$

Si k est le nombre d'éléments ayant la valeur ϵ_{11k} de la déformation, $f_k = \frac{k_k}{n}$ est alors la fréquence relative de ϵ_{11k} .

Par analogie de la fréquence relative et de la notion de probabilité, dans le cas où n est infini :

$$(3.17) \quad \epsilon_{11}^m = E[\epsilon_{11}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_{11} p(\epsilon_{11}) d\epsilon_{11}$$

$p(\epsilon_{11})$ est la densité de probabilité de ϵ_{11} .

En utilisant (3.11), (3.17) devient :

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^m &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\nabla_{11}}{E} p(\nabla_{11}) d\nabla_{11} + \int_{\frac{\nabla_e}{F/S}}^{+\infty} \frac{1}{K} [\nabla_{11} - \nabla_e] p(\nabla_{11}) d\nabla_{11} \\ &= \int_{\frac{F}{ES}}^{+\infty} V p(V) dV + \frac{1}{K} \int_{\frac{\nabla_e}{F/S}}^{+\infty} \left[\frac{F}{S} V - \nabla_e \right] p(V) dV \end{aligned}$$

Or :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V p(V) dV = V_m$$

$$(3.18) \quad \epsilon_{11}^m = \frac{F}{ES} V_m + \frac{F}{KS} \int_{\frac{\nabla_e}{F/S}}^{+\infty} V p(V) dV - \frac{\nabla_e}{K} \int_{\frac{\nabla_e}{F/S}}^{+\infty} p(V) dV$$

Pratiquement, nous chercherons la déformation globale d'une éprouvette de longueur finie constituée d'un certain nombre de colonnes. Définissons d'abord ce que nous appellerons : déformation globale d'une éprouvette.

HYPOTHÈSE

La déformation globale d'une éprouvette de traction est considérée comme la moyenne des déformations globales des différentes colonnes qui constituent cette éprouvette.

Nous émettrons maintenant une hypothèse d'ergodicité qui nous permettra de calculer la déformation d'une éprouvette de dimensions finies à partir de l'expression ci-dessus (3.18).

HYPOTHÈSE

Si nous considérons un nombre infini d'éprouvettes constituées par un nombre infini d'éléments de volume, la densité de probabilité $p_k(V)$ dans une colonne est égale à la densité de probabilité $p_j(V)$ pour un élément de volume de position donnée et considéré dans toutes les colonnes.

Si k est l'indice de la colonne et j l'indice de position :

$$(3.19) \quad p_k(V) = p_j(V) = p(V)$$

Dans une colonne d'indice k , nous pouvons écrire :

$$(3.20) \quad \lim_{J \rightarrow \infty} \frac{(n_{kj})_i}{J} = p_k(V_i) dV_i$$

Pour un élément de position j considéré dans chaque colonne :

$$(3.21) \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{(n_{kj})_i}{K} = p_j(V_i) dV_i$$

Si $(n_{kj})_i$ est le nombre d'éléments ayant la valeur de V comprise entre V_i et $V_i + dV_i$.

Si maintenant nous faisons :

$$\lim_{\substack{K \rightarrow \infty \\ J \rightarrow \infty}} \frac{(n_{kj})_i}{KJ}$$

$(n_{kj})_i$ étant le nombre d'éléments dont la valeur de V est comprise entre V_i et $V_i + dV_i$, pour tous les éléments de toutes les éprouvettes.

Nous pouvons écrire :

$$\lim_{\substack{K \rightarrow \infty \\ J \rightarrow \infty}} \frac{(n_{kj})_i}{KJ} = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^J \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{(n_{kj})_i}{K}$$

$$(3.22) \quad = p_j(V_i) dV_i = p_k(V_i) dV_i = p(V_i) dV_i$$

Pour un nombre fini d'éléments de volume, c'est-à-dire pour un nombre fini d'éprouvettes de dimensions finies, mais pour le produit KJ grand :

$$(3.23) \quad \lim_{\substack{K \rightarrow \infty \\ J \rightarrow \infty}} \frac{(n_{kj})_i}{KJ} \longrightarrow p(V_i) dV_i$$

$p(V)$ étant la densité de probabilité de V dans un volume infini.

III.4. Densité de probabilité du paramètre de répartition des contraintes microscopiques

III.4.1. Mesure des déformations microscopiques d'une éprouvette de traction.

Des quelques travaux effectués dans ce domaine [14, 15], nous retiendrons ceux d'**Esin** [16]. **Esin** a mesuré les déformations microscopiques d'une éprouvette plate d'aluminium dans le domaine élastique conventionnel, par comparaison au microscope de répliques d'un réseau très fin tracé sur l'une des faces et prises à différentes valeurs de la charge, avec la réplique initiale du réseau non chargé (fig. 9). Soixante mesures de déformation sur une longueur de 3 mm ont permis de tracer l'histogramme (fig. 7) et la densité de probabilité des micro-déformations (fig. 8). Celle-ci montre que la distribution des déformations est proche d'une distribution gaussienne. D'autre part, la moyenne calculée de la distribution des déformations coïncide à 0,5 % près avec l'indication d'une jauge de 3 mm de longueur, collée en coïncidence sur la face opposée de l'éprouvette.

III.4.2. Hypothèse de normalité de la distribution du paramètre V

Nous voyons qu'**Esin** est resté dans le domaine des contraintes faibles devant la limite élastique conventionnelle du matériau. D'ailleurs, les valeurs maximales des micro-déformations mesurées sont de l'ordre de 10^{-3} , c'est-à-dire inférieures à la limite élastique classique du matériau utilisé.

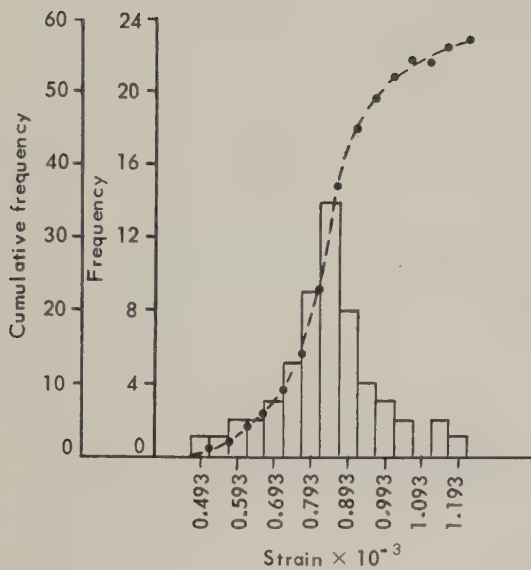


Fig. 7 - Histogram and cumulative frequency curve replica n° 3

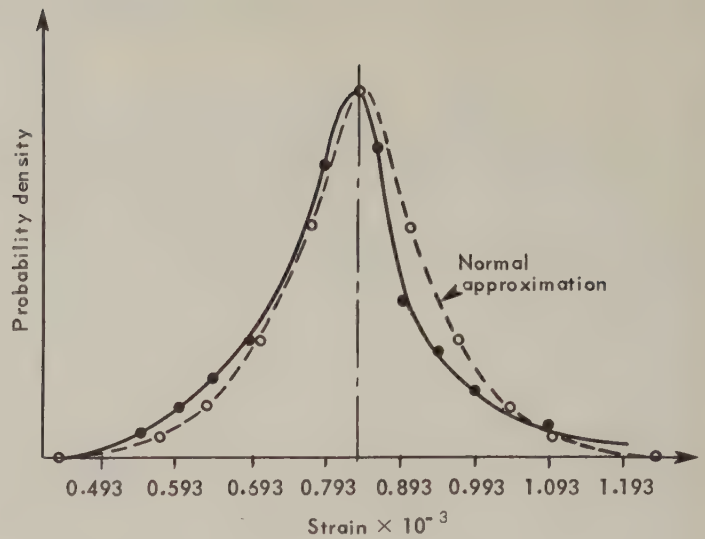
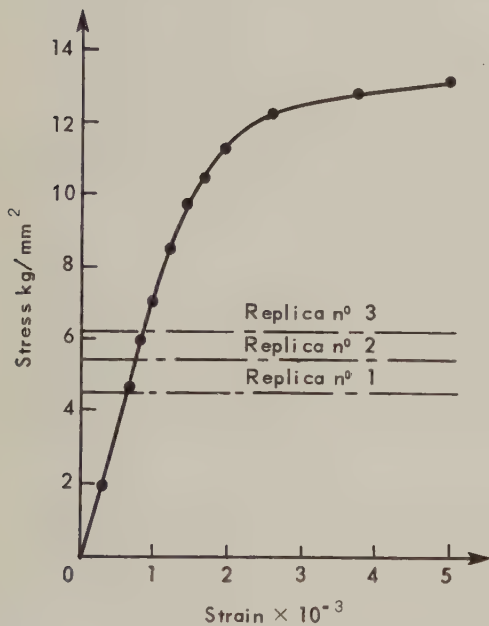


Fig. 8 - Measured distribution and normal approximation replica n° 3



Replica	Stress (kg/mm ²)	Strain from gauge
1	4,50	0,644.10 ⁻³
2	5,50	0,780.10 ⁻³
3	6,25	0,838.10 ⁻³

Fig. 9 - Stress-strain diagram

d'après A. Esin et W.J.D. Jones - Journal of Strain Analysis

Dans l'expression (3.18) donnant la déformation d'une éprouvette, l'intégrale :

$$\int_{\frac{F}{S}}^{\infty} \left[\frac{F}{S} v - \nabla_e \right] p(v) dv$$

est faible devant l'autre terme, c'est-à-dire que presque toutes les microdéformations enregistrées sont purement élastiques.

Si dans ce domaine, nous supposons que les déformations sont distribuées suivant une loi de Gauss, ∇ étant reliée linéairement à ε :

Si
est gaussien,

$$p(\varepsilon)$$

est gaussien.

$$p(\varepsilon \varepsilon) = p(\nabla)$$

Ainsi que :

$$p\left(\frac{E}{F/S}\right) = p(V)$$

C'est-à-dire :

HYPOTHÈSE

Si nous considérons un volume de matière constitué par un nombre infini d'éléments de volume, la densité de probabilité des contraintes et par suite du paramètre V , dans le volume, est gaussienne :

$$(3.24) \quad p(V) = \frac{1}{V\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(V-V_M)^2}{2\bar{V}^2}}$$

V_M moyenne de la densité de probabilité de V .

$\bar{V}$ écart quadratique de la densité de probabilité de V .

Comme nous l'avons indiqué précédemment, nous négligeons les variations de V au cours d'un essai dit «d'écrouissage», ainsi la probabilité $p(V)$ est-elle aussi constante durant ce type d'essai.

III,5. Détermination des paramètres caractéristiques d'une courbe d'écrouissage

III,5.1. Expression d'une courbe d'écrouissage dans le cas d'une distribution gaussienne de V

L'expression (3.18) devient :

$$\epsilon_n^M = \frac{F}{ES} + \frac{F}{KS} \int_{\frac{V_e}{F/S}}^{\infty} \frac{1}{V\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(V-1)^2}{2\bar{V}^2}} dV - \frac{V_e}{K\bar{V}\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{V_e}{F/S}}^{\infty} e^{-\frac{(V-1)^2}{2\bar{V}^2}} dV$$

Nous avons supposé $V_M = 1$,

$$\epsilon_n^M = \frac{F}{ES} + \frac{F}{S} \frac{\bar{\Delta}}{K\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du + \frac{F}{KS\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du - \frac{V_e}{K\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

avec

$$a = \frac{V_e/(F/S) - 1}{\bar{\Delta}}$$

d'où l'expression finale :

$$(3.25) \quad \epsilon_n^M = \frac{F}{ES} + \frac{F\bar{\Delta}}{KS\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[V_e/(F/S)-1]^2}{2\bar{\Delta}^2}} + \frac{1}{K\sqrt{2\pi}} \left[\frac{F}{S} - V_e \right] \int_{\frac{V_e/(F/S)-1}{\bar{\Delta}}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Un modèle de ce type a d'ailleurs déjà été utilisé pour décrire le comportement en traction de l'uranium [17].

III,5.2. Détermination des coefficients

L'approximation de la courbe d'écrouissage n'est pas immédiate, et il faut procéder par tâtonnements autour de valeurs particulières.

Détermination de E

Lorsque F/S est faible, le terme F/ES est prépondérant et il est facile de déterminer le module d'élasticité E .

Détermination de K

Lorsque F/S est grand, la formule devient :

$$(3.26) \quad \epsilon_n^M \approx \frac{F}{S} \left[\frac{1}{E} + \frac{1}{K} \right] - \frac{V_e}{K}$$

Connaissant E , nous pouvons déterminer K par la pente de la droite asymptote ou approximant au mieux la courbe d'écrouissage dans la zone des fortes charges. σ_e est alors l'ordonnée à l'origine.

Détermination de $\bar{V}$

Lorsque $\frac{F}{S} = \sigma_e$, l'expression (3.25) devient : $\epsilon_M'' = \frac{\sigma_e}{E} + \frac{\sigma_e \bar{V}}{K\sqrt{2h}}$
soit

$$(3.27) \quad \bar{V} = K\sqrt{2h} \left[\frac{\epsilon_M''(\sigma_e)}{\sigma_e} - \frac{1}{E} \right]$$

III,5.3. Comparaison avec les courbes expérimentales

Nous avons essayé de rendre compte de quelques courbes d'érouissage à l'aide de ce modèle. Nous avons choisi deux duraluminium, mais dont les courbes de traction ont une allure générale très différente.

a) cas de l'AU4G état t4 (trempé-vieilli)

Ce matériau a une courbe d'érouissage proche de celle d'un matériau à érouissage linéaire, $\bar{V}$ est donc petit. Nous n'avons pas cherché à obtenir une précision supérieure à celle des essais, c'est-à-dire de l'ordre de 1 % en contrainte, ce qui équivaut dans le cas le plus défavorable à une erreur de 5 % en déformation (fig. 10 et 12).

b) cas de l'AU2GN recuit

Ce matériau présente une courbe de traction très arrondie, mais nous obtenons une précision du même ordre de grandeur que dans le cas de l'AU4G (fig. 11 et 12). Nous ne possédons pas la courbe pour les grandes déformations, mais il est vraisemblable que la concordance serait beaucoup moins bonne. Afin d'obtenir une meilleure précision, il serait possible de faire varier la densité de probabilité $\phi(V)$ au cours de la déformation, en particulier V_M .

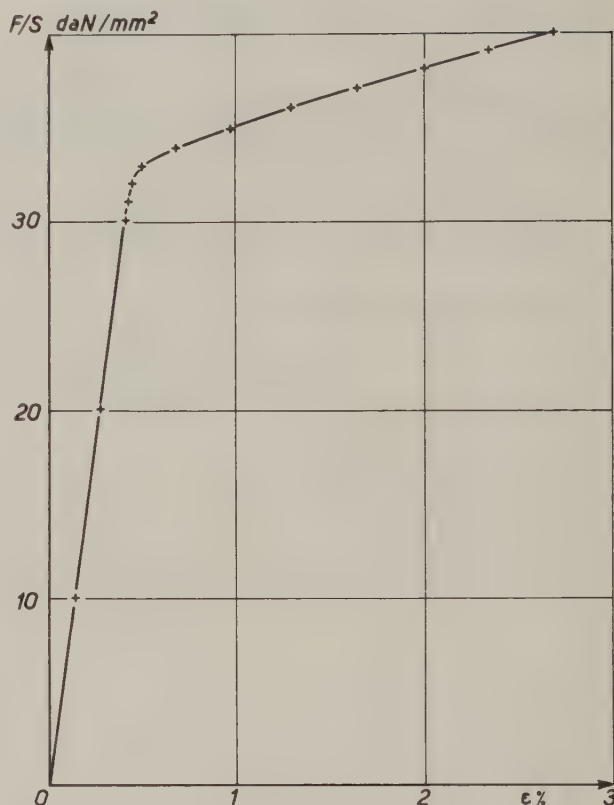


Fig. 10 - Comparaison AU4G.t4

— courbe expérimentale
+ + + + + points calculés

AU4G t4

$$E = 7300 \text{ daN/mm}^2$$

$$K = 300 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_e = 33,6 \text{ daN/mm}^2$$

$$\bar{V} = 0,03$$

AU2GN recuit

$$E = 7300 \text{ daN/mm}^2$$

$$K = 375 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_e = 19,8 \text{ daN/mm}^2$$

$$\bar{V} = 0,33$$

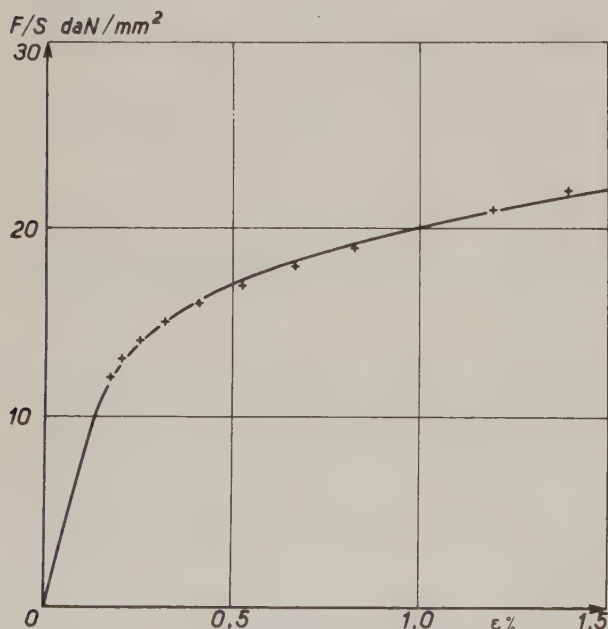


Fig. 11 - Comparaison AU2GN recuit

— courbe expérimentale
+ + + + + points calculés

AU4G+4 $K = 300 \text{ daN/mm}^2$ $\frac{\sigma_e}{\Delta} = 33,6 \text{ daN/mm}^2$ $E = 7300 \text{ daN/mm}^2$ $\Delta = 0,03$			AU2GN $K = 375 \text{ daN/mm}^2$ $\frac{\sigma_e}{\Delta} = 19,8 \text{ daN/mm}^2$ $E = 7300 \text{ daN/mm}^2$ $\Delta = 0,33$		
F/S	ϵ mesuré %	ϵ calculé %	F/S	ϵ mesuré %	ϵ calculé %
0	0	0	0	0	0
10	0,137	0,138	5	0,070	0,068
20	0,272	0,276	10	0,135	0,137
30	0,412	0,414	11	0,155	0,153
31	0,432	0,428	12	0,182	0,174
31,6	0,443	0,438	13	0,220	0,206
32	0,455	0,448	14	0,265	0,253
32,4	0,466	0,464	15	0,322	0,322
32,6	0,472	0,476	16	0,405	0,414
32,8	0,486	0,491	17	0,505	0,529
33,0	0,508	0,510	18	0,628	0,667
33,2	0,532	0,534	19	0,795	0,826
33,6	0,620	0,597	20	0,995	1,003
34	0,720	0,682	21	1,215	1,196
35	0,980	0,964	22	1,48	1,402
36	1,28	1,30			
37	1,60	1,64			
38	1,94	1,99			
39	2,29	2,34			
40	2,66	2,68			
41	3,04	3,03			

Fig. 12 - Comparaison des courbes d'écrouissage et de l'approximation proposée

III,6. Influence de la fatigue sur la répartition des contraintes microscopiques

Il est maintenant important de savoir si la répartition des contraintes microscopiques varie au cours d'un traitement de fatigue. Dans ce cas, d'après l'expression (3.25), nous devrions observer une variation des courbes d'écrouissage pour un matériau ayant subi un chargement de fatigue.

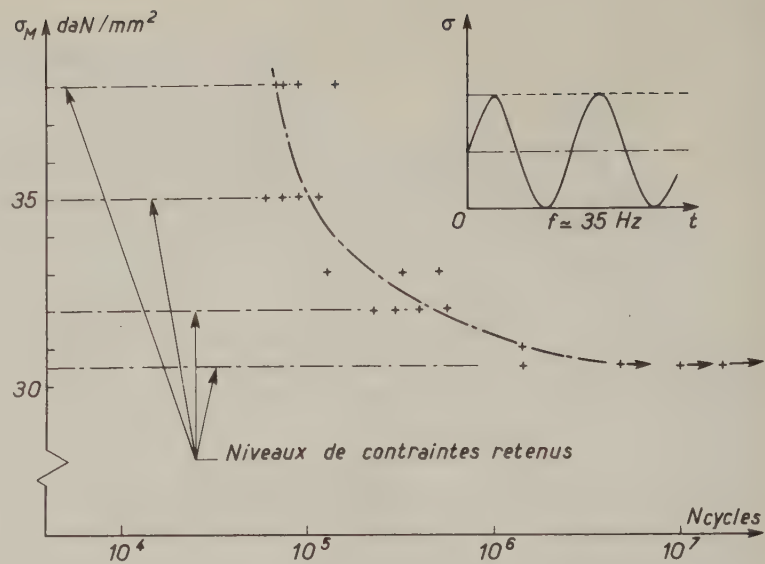
Appuyée sur la lecture de plusieurs travaux, l'idée initiale de ce travail était d'ailleurs l'étude de telles variations ; dans ce cas, le paramètre V aurait pu nous aider à caractériser le phénomène de fatigue. En effet, d'après **Hausseguy** et **Martinod** [18] qui ont étudié les courbes d'écrouissage d'un duraluminium avant et après chargement de fatigue, la fatigue semble induire une variation sensible des caractéristiques plastiques du matériau étudié. L'examen de leurs résultats montre également une variation notable du module d'élasticité. Ils ont opéré en effectuant des essais de traction sur de petites éprouvettes prélevées dans de grosses éprouvettes plates qui avaient été conduites jusqu'à la rupture de fatigue en traction-compression pour des niveaux de charge différents.

Broom et **Ham** [19], opérant sur un cuivre préalablement écroui ont observé également des variations très importantes des courbes d'écrouissage. Ils ont utilisé des éprouvettes fatiguées en traction-compression à des nombres de cycles inférieurs à la durée de vie moyenne au niveau de contrainte considéré.

III,6.1. Description des essais réalisés

Les essais cités ci-dessus et d'autres non cités proposent toujours l'influence d'un traitement de fatigue de traction-compression sur les caractéristiques élastiques et plastiques de traction du matériau considéré. A priori, il semble difficile de conclure à l'influence de la fatigue, puisqu'il est possible d'expliquer ce phénomène par les divers travaux effectués en plasticité anisotrope et notamment l'accommodation des cycles en contrainte (voir par exemple [20]).

Fig. 13 - Courbe de Wöhler - AU4G.tv01



N°	σ_1 daN/mm ²	N ₁ cycles	σ_2 daN/mm ²	N ₂ cycles	Observations
60	30,5	1 445 000			N
27	30,5	17.10 ⁶			Sans rupture
21	30,5	5 524 000			Coup sur l'éprouvette
15	30,5	10.10 ⁶			Sans rupture
6	31	443 800			S.T.
11	31	1 383 500			N
13	31,5	348 000			S.T.
16	31,5	6 700 000			S.T.
24	31,5	228 000			S.T.
5	32	400 200			N
14	32	226 500			N
29	32	207 600			S.T.
28	32	567 000			N
49	32	300 000			N
8	33	344 000			S.T.
7	33	130 200			N
19	33	326 000			N
20	33	3 560 500			N
17	33	497 000			N
3	34	37 100			N
12	34	204 100			S.T.
4	35	61 500			N
18	35	121 500			S.T.
22	35	116 500			N
23	35	129 000			S.T.
25	35	90 700			N
53	35	75 000			N
56	35	?			N
40	38	90 000			N
69	38	69 000			N
26	38	73 700			N
30	38	79 700			S T
70	38	69 000			S T
58	38	68 000			N
75	38	143 000			N
65	38	15 000	32	160 000	N
01					Mise au point
02					Mise au point
31					Incident machine

Nous avons donc entrepris une série d'essais se proposant d'étudier l'influence d'un traitement de fatigue de traction répétée sur les caractéristiques élastiques et plastiques de traction d'un matériau. Ce programme comportait la détermination grossière de la courbe de Wöhler d'un duraluminium AU4G.t4 (trempé vieilli) (fig. 13 et 14) et la définition de quatre niveaux de contrainte auxquelles nous avons soumis une série d'éprouvettes jusqu'à un nombre de cycles voisin de la durée de vie moyenne au niveau considéré (fig. 15). Les éprouvettes utilisées diffèrent légèrement du type classique, par la présence d'une partie cylindrique assez longue pour permettre une détermination plus aisée des caractéristiques de traction (fig. 16). Les essais de traction (25 environ) ont permis, par l'utilisation d'un dynamomètre à jauges et d'un extensomètre à capteurs inductifs, couplés à un enregistreur X Y, la détermination correcte du module d'élasticité avec une précision de l'ordre de 1 % et des courbes d'écrouissage jusqu'à une déformation de 3 %, ainsi que la contrainte maximale à rupture.

Fig. 14 - Récapitulation des essais :
Courbe de Wöhler AU4G.tv 01

N Rupture Normale
S.T. Rupture sous tête

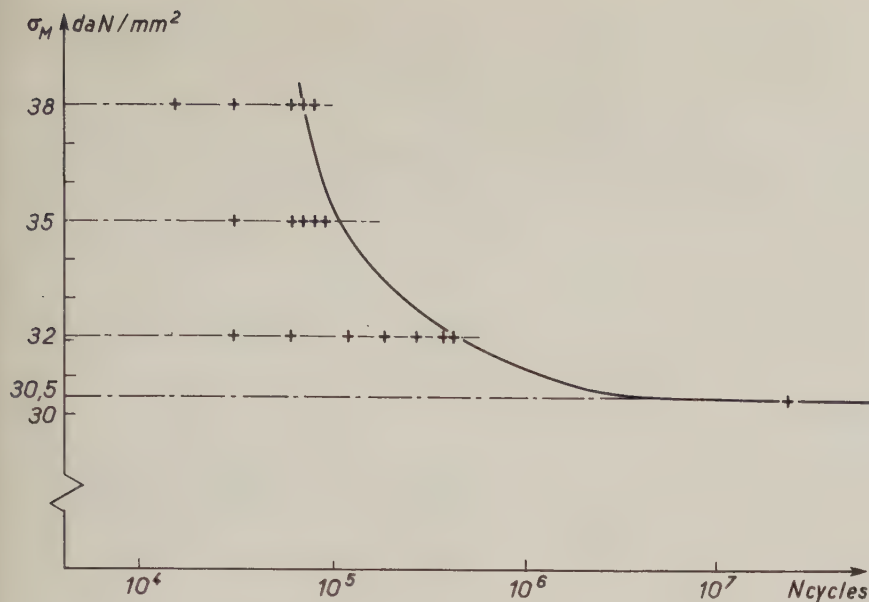


Fig. 15 - Position des traitements de fatigue

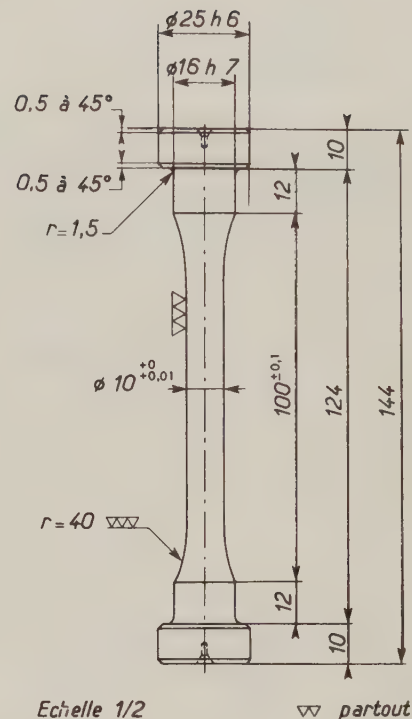


Fig. 16 - Eprouvette T 10.100

III,6.2. Variations du module d'élasticité

Les niveaux de contrainte considérés dépassant largement la limite élastique conventionnelle, il fallait d'abord s'assurer que le module d'élasticité ne variait pas ou peu en fonction d'une déformation plastique préalable. La figure 17 montre la variation du module de rigidité K d'une éprouvette en fonction de la déformation plastique. Si nous calculons E en tenant compte de la variation de section, nous obtenons la figure 18 : la variation est faible et se situe dans la marge d'erreur de la détermination.

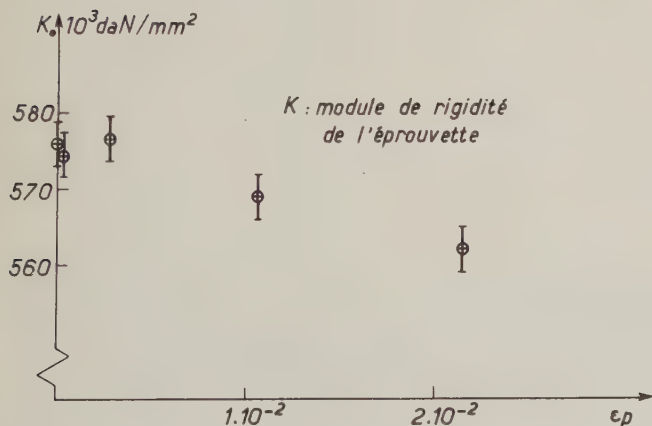


Fig. 17 - Variation de K en fonction d'un écrouissage préalable - AU4G.tv 01

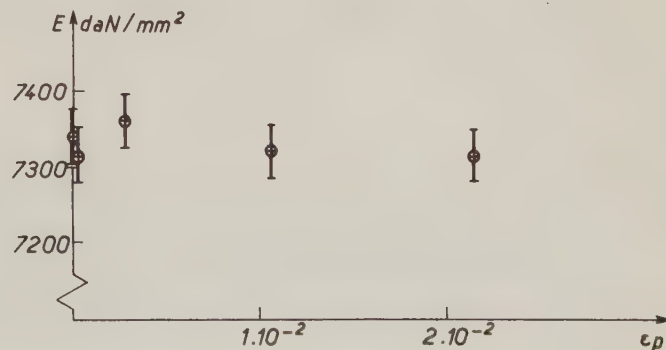


Fig. 18 - Variation de E avec un écrouissage préalable AU4G.tv 01

Les résultats de mesure du module d'élasticité E sur éprouvettes préalablement fatiguées sont représentés sur les figures 19, 20 et 21. Nous voyons que E reste compris dans une bande de hauteur égale à 1,5 % de la valeur moyenne de E , c'est-à-dire proche de la précision de la détermination.

Ce résultat est en accord avec des travaux [21] utilisant la mesure de la vitesse de propagation des ondes ultra-sonores pour déterminer le module d'élasticité : les résultats indiquent une variation maximale de l'ordre de 0,4 %.

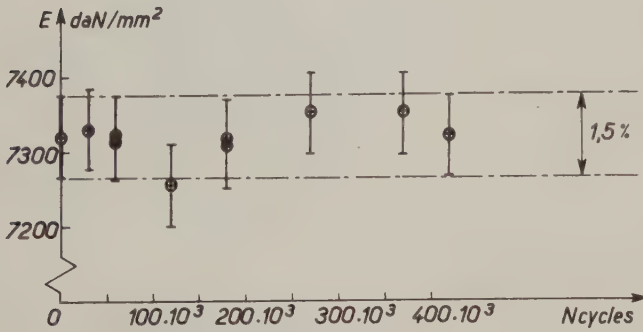


Fig. 19 - Variation de E en fonction d'une fatigue initiale $[+0, +32 \text{ daN/mm}^2]$ AU4G.tv 01

$$\sigma_m = 32 \text{ daN/mm}^2$$

Fig. 20 - Variation de E en fonction d'une fatigue initiale $[+0, +35 \text{ daN/mm}^2]$ AU4G.tv 01

$$\sigma_m = 35 \text{ daN/mm}^2$$

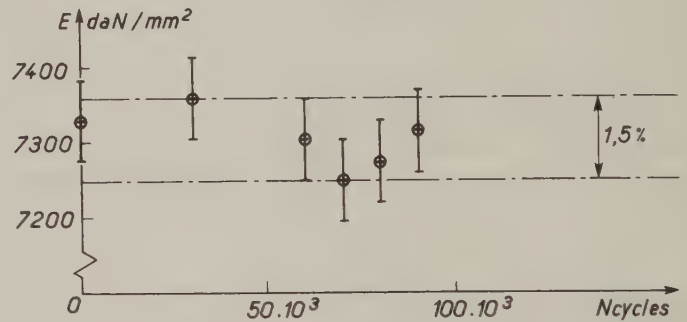
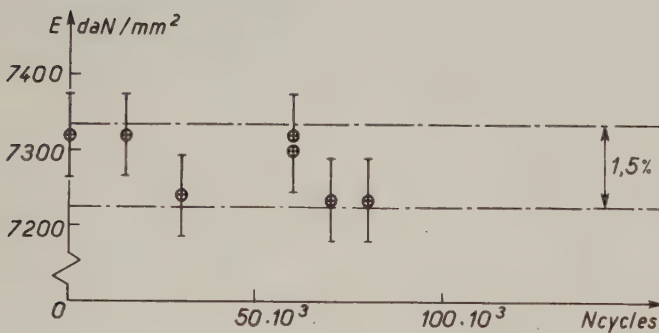


Fig. 21 - Variation de E en fonction d'une fatigue initiale $[+0, +38 \text{ daN/mm}^2]$ AU4G.tv 01

$$\sigma_m = 38 \text{ daN/mm}^2$$



III,6.3. Variations des caractéristiques plastiques

Nous avons comparé les courbes d'écrouissage des éprouvettes « vierges » (sans traitement de fatigue) aux courbes des éprouvettes ayant subi un chargement de fatigue, en effectuant la correction afin d'obtenir la même origine en déformation. Les courbes sont très rapprochées et une telle dispersion se rencontre même pour des éprouvettes théoriquement identiques (traitements thermiques et mécaniques, dimensions, etc...). (figures 22, 23 et 24).

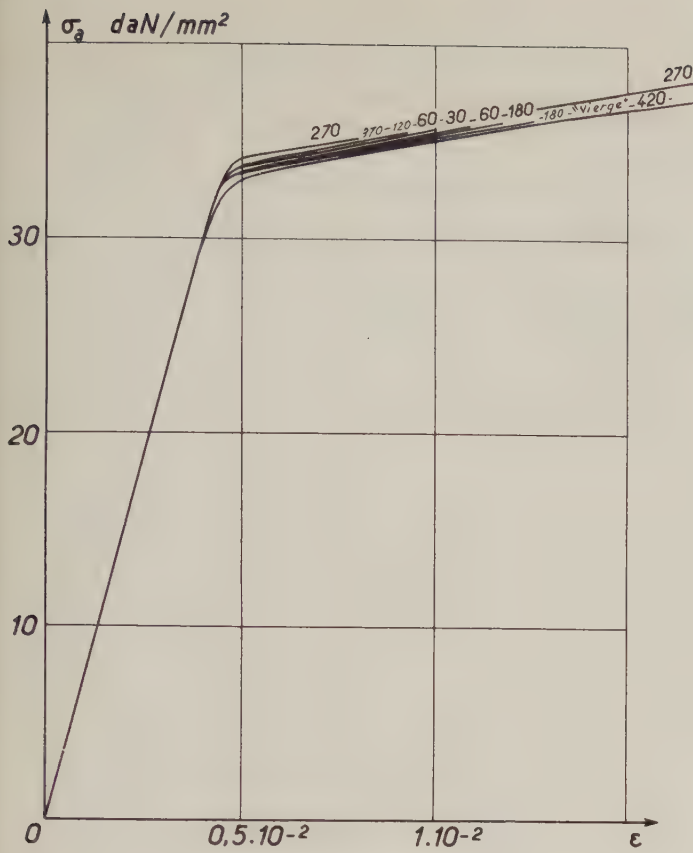


Fig. 22 - Courbes d'écroissage après fatigue
[+0, +32 daN/mm²] AU4G.tv 01

Les nombres de cycles sont indiqués en 10³

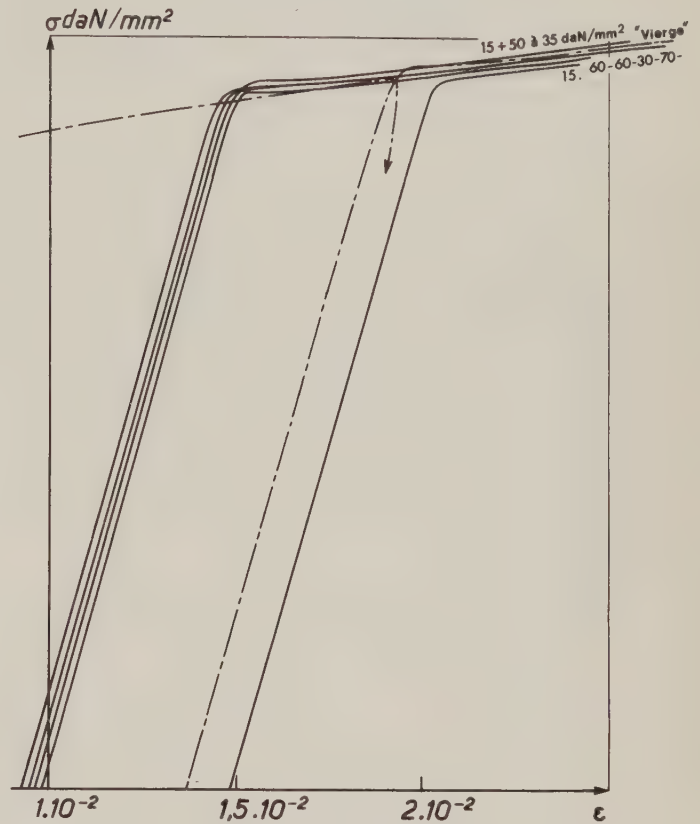


Fig. 24 - Courbes d'écroissage après fatigue
[+0, +38 daN/mm²] AU4G.tv 01

Les nombres de cycles sont indiqués en 10³

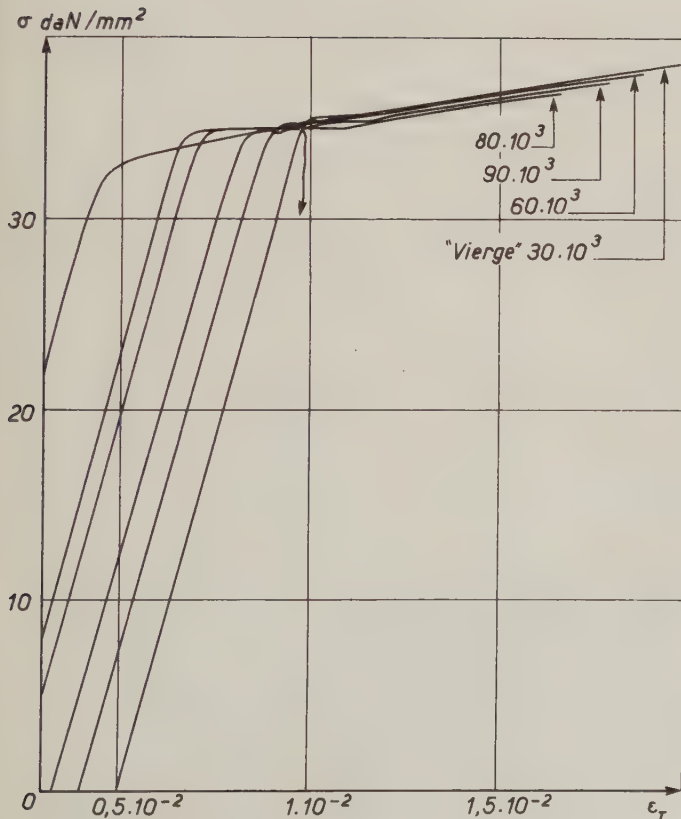


Fig. 23 - Courbes d'écroissage après fatigue
[+0, +35 daN/mm²] AU4G.tv 01

Ces résultats ont été explicités en déterminant la contrainte correspondante à une déformation totale donnée : 0,02 pour les figures 25, 26 et 27 et 0,03 pour les figures 28, 29 et 30. Ces résultats rassemblés (fig. 31) montrent que les variations en contrainte ne dépassent pas 3 %, c'est-à-dire de l'ordre de l'hétérogénéité initiale du lot. En effet, il est difficile de définir à mieux de 2 % la courbe d'érouissage d'une série d'éprouvettes théoriquement identiques, surtout dans le cas d'un matériau trempé : le traitement de trempe étant en général beaucoup plus hétérogène qu'un traitement de recuit par exemple.

Fig. 25 - Comparaison des courbes d'érouissage après fatigue
[+0, +32 daN/mm²] AU4G.tv 01

σ pour $\epsilon_T = 2\%$

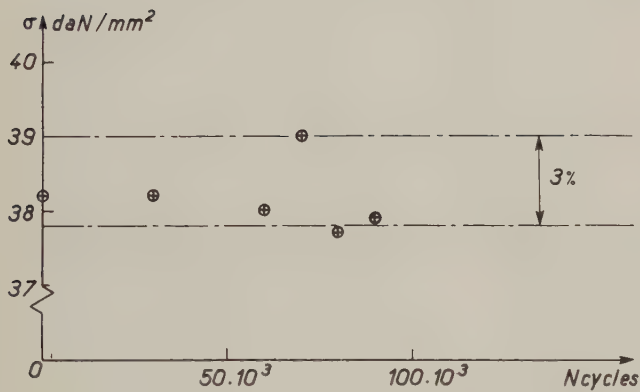
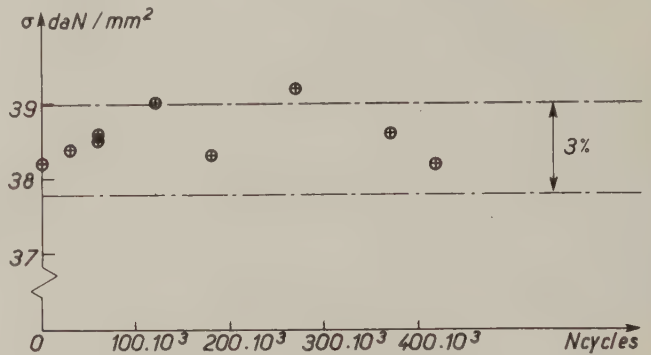


Fig. 26 - Comparaison des courbes d'érouissage après fatigue
[+0, +35 daN/mm²] AU4G.tv 01

σ pour $\epsilon_T = 2\%$

Fig. 27 - Comparaison des courbes d'érouissage après fatigue
[+0, +38 daN/mm²] AU4G.tv 01

σ pour $\epsilon_T = 2\%$

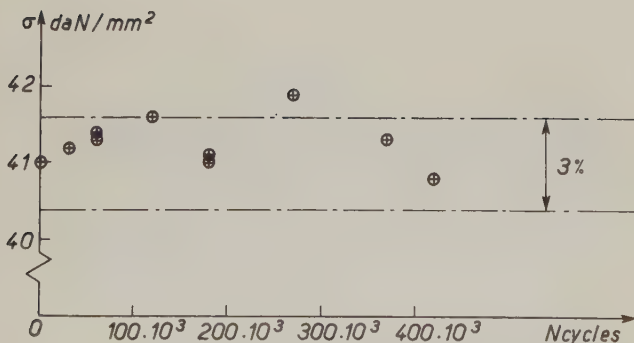
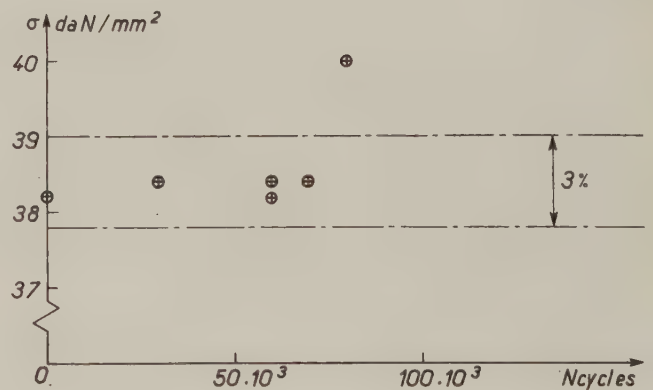


Fig. 28 - Comparaison des courbes d'érouissage après fatigue
[+0, +32 daN/mm²] AU4G.tv 01

σ pour $\epsilon_T = 3\%$

Fig. 29 - Comparaison des courbes d'érouissage après fatigue
[+0, +35 daN/mm²] AU4G.tv 01

pour $\epsilon_T = 3\%$

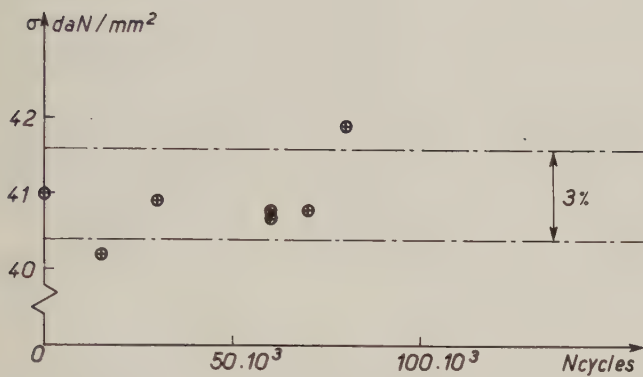
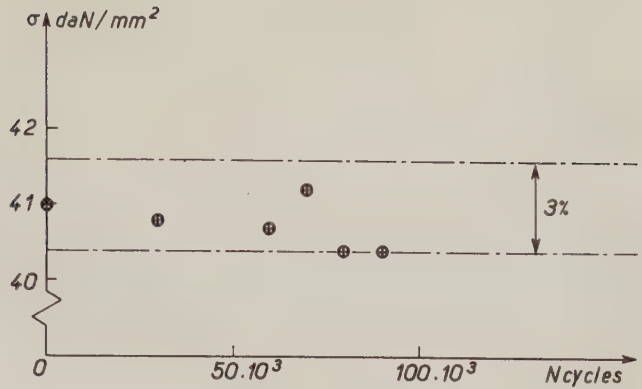


Fig. 30 - Comparaison des courbes d'érouissage après fatigue
[+0, +38 daN/mm²] AU4G.tv 01

pour $\epsilon_T = 3\%$

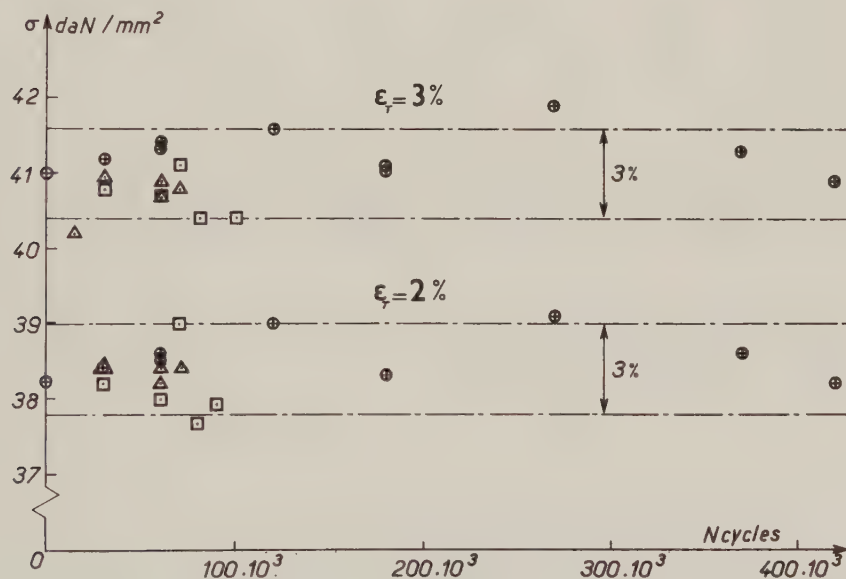


Fig. 31 - Comparaison des courbes d'érouissage après fatigue
pour $\epsilon_T = 2\%$ et $\epsilon_T = 3\%$

- ⊗ Fatigue [+0, +32 daN/mm²]
- Fatigue [+0, +35 daN/mm²]
- ▲ Fatigue [+0, +38 daN/mm²]

D'autre part, les variations de la contrainte maximale à rupture (fig. 32, 33 et 34) ne dépassent pas 3 %.

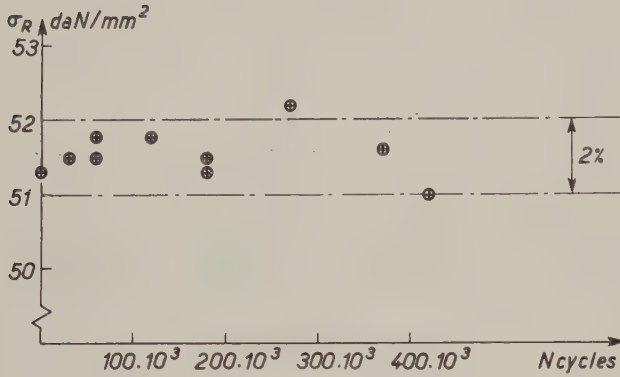


Fig. 32 - Variation de σ_R en fonction d'une fatigue initiale $[+0, +32 \text{ daN/mm}^2]$ AU4G.tv 01

Fig. 33 - Variation de σ_R en fonction d'une fatigue initiale $[+0, +35 \text{ daN/mm}^2]$ AU4G.tv 01

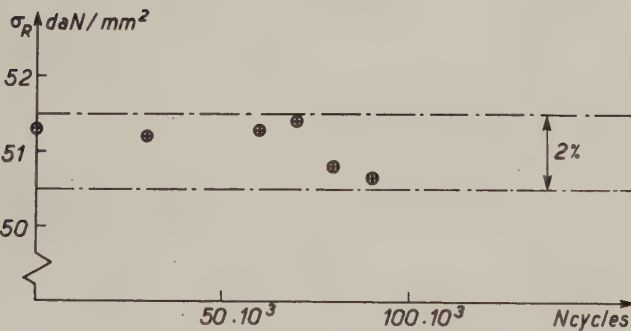
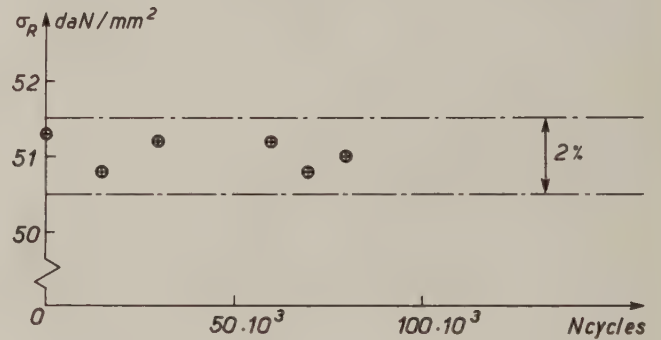


Fig. 34 - Variation de σ_R en fonction d'une fatigue initiale $[+0, +38 \text{ daN/mm}^2]$ AU4G.tv 01

III,6.4. Conclusion

Nous ne donnerons pas de conclusion absolument définitive car les problèmes d'hétérogénéité de lot ne permettent pas de descendre au-dessous d'une certaine précision. Toutefois, nous pouvons dire que les variations du module d'élasticité E et par suite de V_M (d'après l'expression 3.25) sont inférieures à 1,5 % et que les variations des caractéristiques plastiques, en particulier σ_e sont inférieures à 3 %.

Ces variations sont faibles et présentent peu d'intérêt si nous voulions caractériser l'état de fatigue d'un matériau par ce phénomène. Dans tout ce qui suit nous admettrons donc que la répartition des contraintes microscopiques est peu influencée par un traitement de fatigue, d'où :

HYPOTHÈSE

La répartition des contraintes microscopiques et par suite $p(v)$ restent constantes pour un matériau donné, quel que soit le traitement de fatigue imposé.

IV - DOMMAGE EN CHARGEMENT DE TRACTION-COMPRESSION

IV.1. Définition et hypothèses fondamentales

Nous avons vu précédemment que le phénomène de fatigue se caractérise par la création et la croissance de défauts qui s'accumulent dans les bandes de glissement, frontière de grains, sous-joints de grains. Ces défauts commencent par prendre la forme de petits trous qui s'étendent ensuite pour former des fissures macroscopiques qui donnent naissance à une ou des fissures qui se développeront dans quelques grains. La propagation de l'une de ces fissures aboutira à la rupture de l'éprouvette. Une éprouvette soumise à des charges cycliques est donc le siège dans ses éléments de volume, de déformations plastiques mais aussi de création de défauts.

C'est la création de ces défauts que nous allons maintenant étudier, afin de pouvoir rendre compte du phénomène dit de « fatigue ».

Imaginons que dans un élément de volume du milieu microscopiquement hétérogène, il existe un grand nombre de petits défauts que nous pouvons schématiser sous la forme de petits « ellipsoïdes aplatis ».

Ces défauts peuvent être définis par l'aire de leur section principale Δ_i et par la normale au plan de cette section $\vec{p}_i$. Définissons alors une « densité » de défauts par unité de volume et par unité d'angle solide Ω , autour d'un point P , en considérant la somme des aires des sections principales des défauts contenus dans δV et dont la normale est contenue dans le cône d'axe $\vec{n}$ et d'angle solide : $\delta \Omega$.

$$(4.1) \quad D(\vec{n}, P, t) = \frac{\sum s_i (\vec{p}_i \in \text{cône})}{\delta \Omega \cdot \delta V}$$

Par analogie avec la contrainte normale d'un milieu continu, nous supposons que D peut se mettre sous la forme :

$$(4.2) \quad D = \bar{n} \Delta n$$

Nous appellerons le tenseur D : « TENSEUR DE DOMMAGE ».

Cas d'un chargement de traction-compression

Dans le cas d'un chargement uniaxial de traction-compression, quelques hypothèses permettent d'obtenir une simplification de la caractérisation du dommage.

HYPOTHESE

Dans le cas d'un chargement uniaxial de traction-compression, la rupture ne dépend que de la valeur de D selon l'axe du chargement ($\vec{n}_1$).

C'est-à-dire que la rupture ne dépendra que de :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Delta_{ij}$$

C'est-à-dire Δ_{11} .

Nous appellerons Δ_{11} : « PARAMÈTRE DE DOMMAGE EN CHARGEMENT DE TRACTION-COMPRESSION »

Dans chaque élément de volume, il existe une répartition du paramètre Δ_{11} qui est en fait la densité de défauts autour de M , dont la normale est parallèle à l'axe du chargement.

HYPOTHESE

La densité de probabilité $\tilde{p}(\mu)$ de la variable réduite $\mu = \frac{\Delta_{11} - \Delta_{11}^M}{\Delta_{11}}$ reste constante quel que soit le chargement cyclique de traction-compression imposé.

C'est-à-dire que Δ_{11}^M et $\bar{\Delta}$ sont seuls nécessaires pour caractériser la répartition du paramètre de dommage Δ_{11} .

Nous ferons aussi une hypothèse concernant les répartitions initiales du paramètre de dommage dans chaque élément de volume du matériau « vierge » de tout traitement mécanique.

HYPOTHÈSE

Dans le matériau à l'état « vierge », les répartitions du paramètre de dommage Δ_{11} sont identiques pour tous les éléments de volume.

C'est-à-dire que nous pourrions considérer qu'initialement les paramètres caractéristiques des répartitions de Δ_{11} , dans chaque élément de volume sont égaux.

IV,2. Loi de variation du paramètre de dommage dans un élément de volume

Nous considérerons donc les variations du paramètre de dommage Δ_{11} dans un élément de volume quelconque soumis à une contrainte uniaxiale σ_{11} . Δ_{11} et σ_{11} sont notés désormais Δ et σ .

Afin d'établir une loi simple de variation du paramètre Δ , énonçons quelques hypothèses.

IV,2.1. Hypothèses de base

HYPOTHÈSE

Le paramètre de dommage Δ_i en un point, se définit comme une fonctionnelle temporelle de la contrainte microscopique σ_i en ce point :

$$(4.4) \quad \Delta_i = \mathcal{G}(\sigma_i)$$

HYPOTHÈSE

La fonctionnelle $\mathcal{G}$ est indépendante de l'instant considéré et elle ne fait intervenir que les paramètres et leurs dérivées premières.

D'autre part, introduisons la déformation plastique $\varepsilon_{11}^p, \dot{\varepsilon}_{11}^p$, bien que ce paramètre soit une fonction de σ , son utilisation peut permettre une formulation plus simple de la loi de variation de Δ .

(4.4) se met alors sous la forme :

$$(4.5) \quad \tilde{\mathcal{G}}(\Delta, \dot{\Delta}, \sigma, \dot{\sigma}, \varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p) = 0$$

que nous pouvons résoudre par rapport à Δ :

$$(4.6) \quad \Delta = \tilde{\mathcal{G}}(\dot{\Delta}, \sigma, \dot{\sigma}, \varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p)$$

IV,2.2. Cas de la plasticité

Étudions une loi de variation de type plastique, c'est-à-dire que la variation de Δ est indépendante de la vitesse de parcours du trajet de charge.

Ainsi, si :

$$\dot{\sigma} \longrightarrow \lambda \dot{\sigma}$$

il faut que :

$$\dot{\Delta} \longrightarrow \lambda \dot{\Delta}$$

dans le cas d'un chargement croissant c'est-à-dire : $\lambda > 0$

Il faut donc que :

$$(4.7) \quad \tilde{\mathcal{G}}(\Delta, \sigma, \lambda \dot{\sigma}, \varepsilon_p, \lambda \dot{\varepsilon}_p) = \lambda \tilde{\mathcal{G}}(\Delta, \sigma, \dot{\sigma}, \varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p)$$

c'est-à-dire :

$$(4.8) \quad \tilde{\mathcal{G}}(\lambda x, \lambda y) = \lambda \tilde{\mathcal{G}}(x, y)$$

Cherchons sous quelle forme $\tilde{g}$ doit se mettre pour réaliser cette condition.

Pour $x > 0$ Faisons
$$\begin{cases} \lambda \rightarrow x \\ x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow y/x \end{cases}$$

(4.8) devient :

$$\tilde{g}(x, y) = x \tilde{g}(1, y/x) = x h[y/x] = x \bar{h}[x/y]$$

Pour $x < 0$ Faisons
$$\begin{cases} \lambda \rightarrow -x \\ x \rightarrow -1 \\ y \rightarrow -y/x \end{cases}$$

(4.8) devient :

$$\tilde{g}(x, y) = -x \tilde{g}(-1, -y/x) = x \bar{h}(y/x) = x \bar{h}(x/y)$$

(4.6) doit donc se mettre sous la forme :

$$(4.9) \quad \dot{\Delta} = \dot{V} g(\Delta, V, \varepsilon_p, \frac{\dot{V}}{\dot{\varepsilon}_p}, \text{sign } \dot{V})$$

Or la loi de comportement peut s'écrire :

$$(4.10) \quad \dot{\varepsilon}_p = l(\Delta, \varepsilon_p, \text{sign } \dot{V}) \dot{V}$$

Ainsi, (4.9) devient :

$$(4.11) \quad \dot{\Delta} = \dot{V} \tilde{h}(\Delta, V, \varepsilon_p, \text{sign } \dot{V})$$

qui peut se mettre aussi sous la forme :

$$(4.12) \quad \dot{\Delta} = \dot{V} \tilde{h}(\Delta, V, \varepsilon_p, \text{sign } \dot{V})$$

D'autre part :

HYPOTHÈSE

La variation du dommage est nulle lorsque $\nabla \dot{V} < 0$.

Nous pouvons donc écrire (4.12) sous la forme :

$$(4.13) \quad \dot{\Delta} = \dot{V} \tilde{h}(\Delta, V, \varepsilon_p) \eta(\nabla \dot{V})$$

avec :

$$\begin{cases} \eta(\nabla \dot{V}) = 1 & \text{pour } \nabla \dot{V} > 0 \\ \eta(\nabla \dot{V}) = 0 & \text{pour } \nabla \dot{V} \leq 0 \end{cases}$$

IV,2.3. Hypothèse de linéarité

La variation du paramètre Δ est analogue au phénomène de croissance de fissures et il est peut-être intéressant de s'inspirer des formules semi-empiriques de propagation des fissures.

Pour les petites fissures, la loi de **Frost** et **Dugdale** [22] est assez bien vérifiée et fait intervenir pour la

variation de longueur de la fissure, une linéarité en fonction de la longueur de la fissure :

$$(4.14) \quad dl = K l \nabla_0 dN$$

Nous admettrons une formulation un peu plus générale :

HYPOTHÈSE

La variation du paramètre de dommage Δ est affine en fonction de la valeur de ce paramètre :

$$(4.15) \quad \dot{\Delta} = \left[h(\nabla, \varepsilon_p) + \Delta h(\Delta, \varepsilon_p) \right] \eta(\nabla \dot{\nabla}) \dot{\nabla}$$

IV,2.4. Lois de variation de la distribution de dommage dans un élément de volume

Nous pouvons développer les fonctions h et k par rapport à ε_p , C'est-à-dire :

$$(4.16) \quad \dot{\Delta} = \left[h_0(\nabla) + h_1(\nabla)\varepsilon_p + h_2(\nabla)\varepsilon_p^2 + \dots + \Delta h_0(\nabla) + \Delta h_1(\nabla)\varepsilon_p + \Delta h_2(\nabla)\varepsilon_p^2 + \dots \right] \eta(\nabla \dot{\nabla}) \dot{\nabla}$$

Nous nous limiterons pour l'instant aux termes du premier ordre en ε_p .

Il est difficile de justifier la linéarité en ε_p à l'échelle considérée, mais cette forme ne doit être considérée que comme une première approximation du problème.

Ainsi nous adopterons comme loi de variation :

$$(4.17) \quad \dot{\Delta} = \left[h_0(\nabla) + h_1(\nabla)\varepsilon_p + \Delta h_0(\nabla) + \Delta h_1(\nabla)\varepsilon_p \right] \eta(\nabla \dot{\nabla}) \dot{\nabla}$$

Qui peut encore s'écrire :

$$(4.18) \quad d\Delta = \left[h_0(\nabla) + h_1(\nabla)\varepsilon_p + \Delta h_0(\nabla) + \Delta h_1(\nabla)\varepsilon_p \right] \eta(\nabla \dot{\nabla}) d\nabla$$

La densité de probabilité de dommage étant caractérisée par sa moyenne Δ_m et son écart quadratique $\bar{\Delta}$, nous allons étudier les variations de ces deux paramètres.

a) Variation de Δ_m .

Nous adopterons les notations classiques de probabilité, c'est-à-dire que nous appellerons valeur moyenne ou espérance mathématique l'expression :

$$E[X] = x_m = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$$

et son écart quadratique $\bar{X}$:

$$E[(X - x_m)^2] = \bar{X}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_m)^2 p(x) dx$$

$p(x)$ étant la densité de probabilité de la variable X .

Il vient immédiatement

$$(4.19) \quad \begin{aligned} E(d\Delta) &= d\Delta_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[h_0 + h_1 \varepsilon_p + h_0 \Delta + h_1 \Delta \varepsilon_p \right] \eta(\nabla \dot{\nabla}) d\nabla p(\Delta, \varepsilon_p) d\Delta d\varepsilon_p \\ &= E \left[\left(h_0 + h_1 \varepsilon_p + h_0 \Delta + h_1 [(\Delta - \Delta_m)(\varepsilon_p - \varepsilon_{pm}) + \Delta \varepsilon_{pm} + \Delta_m \varepsilon_p - \Delta_m \varepsilon_{pm}] \right) \eta(\nabla \dot{\nabla}) d\nabla \right] \end{aligned}$$

Nous précisons Annexe 1, de quelle façon nous pouvons négliger l'expression : $E[(\Delta - \Delta_m)(\varepsilon_p - \varepsilon_{pm})]$

Ce qui revient à dire que les variables Δ et ε_p ne sont pas ou peu corrélées, ce qui n'exclut pas certains types de dépendance.

Dans ce cas, l'expression (4.19) devient :

$$(4.20) \quad d\Delta_M = \frac{[h_0(\sigma) + h_1(\sigma)\varepsilon_{pm} + \Delta_M(h_0(\sigma) + h_1(\sigma)\varepsilon_{pm})] \gamma(\sigma\sigma') d\sigma}{\gamma(\sigma\sigma') d\sigma}$$

b) Variation de $\bar{\Delta}$.

Δ peut être considéré comme une fonction du temps et du point, c'est-à-dire que lorsque τ varie :

$$\begin{cases} \Delta \longrightarrow \Delta + d\Delta \\ \Delta_M \longrightarrow \Delta_M + d\Delta_M \\ \bar{\Delta} \longrightarrow \bar{\Delta} + d\bar{\Delta} \end{cases}$$

Ainsi, si :

$$\begin{aligned} E[(\Delta - \Delta_M)^2] &= \bar{\Delta}^2 \\ E[(\Delta + d\Delta - \Delta_M - d\Delta_M)^2] &= [\bar{\Delta} + d\bar{\Delta}]^2 \end{aligned}$$

Par soustraction et en négligeant les termes du deuxième ordre :

$$\bar{\Delta} d\bar{\Delta} = E[(\Delta - \Delta_M)(d\Delta - d\Delta_M)]$$

En utilisant les relations (4.18) et (4.20) :

$$(4.21) \quad \begin{aligned} \bar{\Delta} d\bar{\Delta} &= E \left\{ (\Delta - \Delta_M) [h_1(\varepsilon_p - \varepsilon_{pm}) + h_0(\Delta - \Delta_M) + h_1(\Delta \varepsilon_p - \Delta_M \varepsilon_{pm})] \gamma(\sigma\sigma') d\sigma \right\} \\ &= E \left\{ h_1(\Delta - \Delta_M)(\varepsilon_p - \varepsilon_{pm}) + h_0(\Delta - \Delta_M)^2 + h_1(\Delta - \Delta_M)^2(\varepsilon_p - \varepsilon_{pm}) + h_1 \varepsilon_{pm}(\Delta - \Delta_M)^2 \right. \\ &\quad \left. + h_1 \Delta_M(\varepsilon_p - \varepsilon_{pm})(\Delta - \Delta_M) \right\} \gamma(\sigma\sigma') d\sigma \end{aligned}$$

Nous montrons en Annexe que les expressions du type :

$$\begin{aligned} &E[(\Delta - \Delta_M)(\varepsilon_p - \varepsilon_{pm})] \\ &E[(\Delta - \Delta_M)^2(\varepsilon_p - \varepsilon_{pm})] \end{aligned}$$

peuvent être considérées comme négligeables.

Ainsi :

$$\bar{\Delta} d\bar{\Delta} = [h_0(\sigma)\bar{\Delta}^2 + h_1(\sigma)\bar{\Delta}^2 \varepsilon_{pm}] \gamma(\sigma\sigma') d\sigma$$

c'est-à-dire :

$$(4.22) \quad d\bar{\Delta} = \bar{\Delta} [h_0(\sigma) + h_1(\sigma)\varepsilon_{pm}] \gamma(\sigma\sigma') d\sigma$$

Il reste à vérifier que les expressions que nous avons supposé négligeables précédemment, le restent quand varie, c'est-à-dire que par exemple :

$$E[(\Delta + \delta\Delta - \Delta_M - \delta\Delta_M)(\varepsilon_p - \varepsilon_{pm})] = 0$$

En utilisant les relations (4.18) et (4.20) :

$$\begin{aligned} &E \left\{ [(\Delta - \Delta_M) [h_1(\varepsilon_p - \varepsilon_{pm}) + h_0(\Delta - \Delta_M) + h_1(\Delta \varepsilon_p - \Delta_M \varepsilon_{pm})] \gamma(\sigma\sigma') d\sigma] \{ \varepsilon_p - \varepsilon_{pm} \} \right\} \\ &= E \left\{ [(\Delta - \Delta_M) [h_1(\varepsilon_p - \varepsilon_{pm}) + h_0(\Delta - \Delta_M) + h_1(\Delta - \Delta_M)(\varepsilon_p - \varepsilon_{pm}) + h_1 \varepsilon_{pm}(\Delta - \Delta_M) + h_1 \Delta_M(\varepsilon_p - \varepsilon_{pm})] \gamma(\sigma\sigma') d\sigma] \{ \varepsilon_p - \varepsilon_{pm} \} \right\} \end{aligned}$$

Expression qui peut, en utilisant les résultats de l'Annexe, être négligée :

$$E \left[(\Delta - \Delta + \delta \Delta - \delta \Delta_M) (\epsilon_P - \epsilon_{PM}) \right] = 0$$

Nous pourrions vérifier de même que les autres expressions de ce type restent négligeables lors de la variation de Δ .

IV.3. Variation de la distribution de dommage dans un élément de volume pour un trajet de charge donné

Nous allons maintenant calculer les variations de $\bar{\Delta}$ et Δ_M , au cours d'un chargement caractéristiques des essais classiques de fatigue, c'est-à-dire que l'éprouvette de traction-compression sera sollicitée par une force variant entre deux valeurs constantes.

D'autre part, pour intégrer les équations (4.20) et (4.21), nous supposons que ϵ_{PM} reste constant durant les cycles de chargement, c'est-à-dire que le cycle contrainte-déformation de l'élément de volume se réduit à une droite élastique d'abscisse à l'origine ϵ_{PM} constante. Nous n'avons pas donné la relation contraintes-déformations de l'élément de volume en compression, mais les essais de fatigue étant rarement exécutés avec une charge de compression supérieure à la charge de traction et si nous négligeons pour l'instant l'effet **Bauschinger** de l'élément de volume, nous supposons que pour tous les cas où :

$$\left| \frac{F}{S} \right|_{\text{Traction}} \geq \left| \frac{F}{S} \right|_{\text{Compression}}$$

les cycles de contrainte-déformation sont tous identiques, y compris le premier et se réduisent à la droite élastique.

IV.3.1. Cas d'un cycle de charge

Nous considérerons d'abord le cas d'un cycle pendant lequel la contrainte σ appliquée à l'élément de volume varie d'une valeur a à une autre valeur b telles que $b > a$.

Plusieurs cas peuvent se présenter :

a) Cycle tel que $b > a > 0$: (fig. 35)

Il suffit de calculer la variation de dommage quand σ varie de a à b , c'est-à-dire durant le trajet de charge (D - E) pendant lequel :

$$\eta(\sigma) = 1$$

Si initialement nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta_M &= \Delta_M^D \\ \bar{\Delta} &= \bar{\Delta}^D \end{aligned}$$

Résolvons d'abord (4.22) avec :

$$\bar{\Delta}' = \frac{d\bar{\Delta}}{d\sigma}$$

C'est-à-dire :

$$\bar{\Delta}' - \bar{\Delta} [k_0 + k_1 \epsilon_{PM}] = 0$$

dont la solution est :

$$\bar{\Delta}^E = \bar{\Delta}^D e^{\int_a^b [k_0(\sigma) + k_1(\sigma) \epsilon_{PM}] d\sigma}$$

Si nous posons :

$$(4.23) \quad \int_0^x [k_0(u) + k_1(u) \epsilon_{PM}] du = \frac{K_0(x) + K_1(x) \epsilon_{PM}}{A(x)} = A(x)$$

pour $x > 0$ et $A(0) = 0$

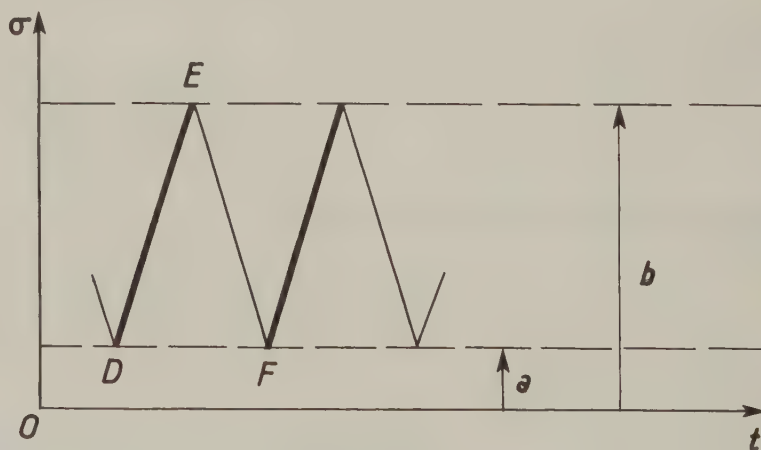


Fig. 35 - Cycle $b > a > 0$

Ainsi :

$$(4.24) \quad \underline{\bar{\Delta}^F = \bar{\Delta}^E = \bar{\Delta}^D e^{A(b)-A(a)}}$$

Réolvons maintenant (4.20) avec : $\Delta'_M = \frac{d\Delta_M}{dV}$

C'est-à-dire :

$$\Delta'_M - \Delta_M [h_0(V) + h_1(V) \varepsilon_{pm}] = h_0(V) + h_1(V) \varepsilon_{pm}$$

Dont la solution sans second membre est : $\Delta_M = K e^{A(V)}$

Par dérivation de la constante :

$$K' e^{A(V)} = h_0(V) + h_1(V) \varepsilon_{pm}$$

$$K = 1 + \int_a^b \frac{h_0(u) + h_1(u) \varepsilon_{pm}}{e^{A(u)}} du$$

D'où :

$$\Delta_M^E = 1 e^{A(V)} + e^{A(V)} \int_a^b \frac{h_0(u) + h_1(u) \varepsilon_{pm}}{e^{A(u)}} du$$

Lorsque $a = b$:

$$\Delta_M^E = \Delta_M^D = 1 e^{A(a)} \longrightarrow 1 = \frac{\Delta_M^D}{e^{A(a)}}$$

D'où :

$$\Delta_M^E = \Delta_M^D e^{A(b)-A(a)} + e^{A(b)} \int_a^b \frac{h_0(u) + h_1(u) \varepsilon_{pm}}{e^{A(u)}} du$$

Posons :

$$\int_0^x \frac{h_0(u) + h_1(u) \varepsilon_{pm}}{e^{A(u)}} du = B(x)$$

pour $x > 0$ avec $B(0) = 0$

Donc :

$$(4.26) \quad \underline{\Delta_M^F = \Delta_M^E = \Delta_M^D e^{A(b)-A(a)} + e^{A(b)} [B(b) - B(a)]}$$

b) Cycle tel que $b > 0$ et $a < 0$ (fig. 36)

Il serait possible de calculer les valeurs de $\bar{\Delta}$ et Δ_M après un tel cycle mais les formules obtenues ne permettraient pas une exploitation aisée. Ainsi, en nous basant sur des expériences de la littérature qui montrent qu'il est très difficile d'obtenir la rupture par fatigue en compression pure (en particulier, la limite de fatigue en compression pure est de l'ordre de la limite de rupture statique en traction), nous supposons :

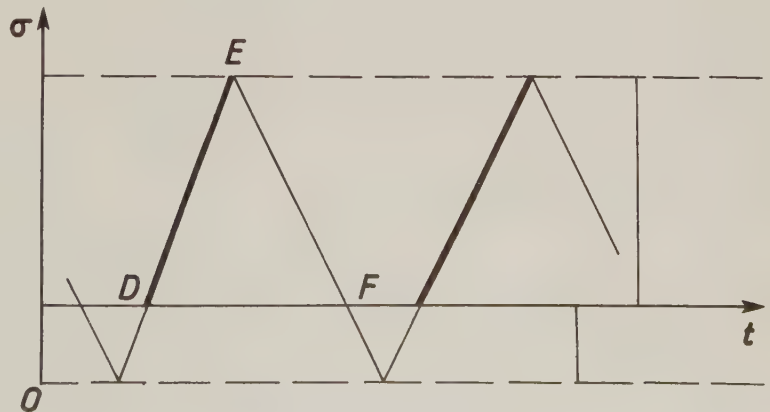


Fig. 36 - Cycle $b > 0$ $a < 0$

HYPOTHÈSE

Le dommage ne varie pas lorsque $\sigma > 0$ ce qui conduit à :

$$(4.27) \quad \begin{aligned} A(x) &= 0 \\ B(x) &= 0 \end{aligned} \quad \text{pour} \quad x < 0$$

Ainsi les formules trouvées précédemment sont également valables dans le cas d'un cycle tel que $b > 0$ et $a > 0$.

IV,3.2. Cas de n cycles à amplitude constante (fig. 37)

Nous allons maintenant calculer les valeurs de Δ_M et $\bar{\Delta}$ après n cycles pendant lesquels la contrainte σ appliquée à l'élément de volume considéré varie entre deux limites fixes a et b , telles que $b > a$. Nous noterons les valeurs initiales de Δ_M et $\bar{\Delta}$ respectivement par Δ_M^0 et $\bar{\Delta}^0$.

a) Calcul de $\bar{\Delta}$ après n cycles :

Nous noterons cette valeur :

En utilisant l'expression (4.24) nous pouvons écrire :

$$\text{A l'état (0)} : \bar{\Delta}^0 = \bar{\Delta}^0 e^{A(b)}$$

$$\text{A l'état (1)} : \bar{\Delta}^1 = \bar{\Delta}^0 e^{2A(b) - A(a)}$$

$$\text{A l'état (2)} : \bar{\Delta}^2 = \bar{\Delta}^0 e^{3A(b) - 2A(a)}$$

L'expression générale est donc :

$$(4.28) \quad \bar{\Delta}^n = \bar{\Delta}^0 e^{(n+1)A(b) - nA(a)}$$

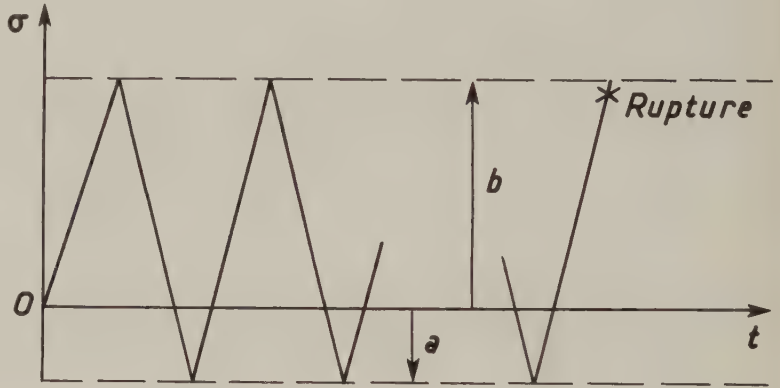


Fig. 37 - n cycles [a, b]

b) Calcul de Δ_M après n cycles :

Δ_M^n est la valeur de Δ_M après n cycles.

Nous calculons $\bar{\Delta}$ et Δ_M pour un état dans lequel l'élément de volume est soumis à la contrainte b , car la rupture de l'élément doit vraisemblablement intervenir lorsque σ est maximale.

En utilisant l'expression (4.26) nous pouvons écrire :

$$\text{A l'état (0)} : \Delta_M^0 = \Delta_M^0 e^{A(b)} + e^{A(b)} [B(b)]$$

$$\text{A l'état (1)} : \Delta_M^1 = \Delta_M^0 e^{A(b) - A(a)} + e^{A(b)} [B(b) - B(a)]$$

$$\text{A l'état (2)} : \Delta_M^2 = \Delta_M^1 e^{A(b) - A(a)} + e^{A(b)} [B(b) - B(a)]$$

$$\text{A l'état (n-1)} : \Delta_M^{n-1} = \Delta_M^{n-2} e^{A(b) - A(a)} + e^{A(b)} [B(b) - B(a)]$$

$$\text{A l'état (n)} : \Delta_M^n = \Delta_M^{n-1} e^{A(b) - A(a)} + e^{A(b)} [B(b) - B(a)]$$

Nous obtenons la formule de récurrence :

$$\Delta_M^n = \Delta_M^0 e^{n[A(b) - A(a)]} + e^{A(b)} [B(b) - B(a)] \frac{1 - e^{n[A(b) - A(a)]}}{1 - e^{A(b) - A(a)}}$$

Si nous remplaçons Δ_M^0 par sa valeur, nous obtenons l'expression générale :

$$(4.30) \quad \Delta_M^n = [\Delta_M^0 + B(b)] e^{(n+1)A(b) - nA(a)} + e^{A(b)} [B(b) - B(a)] \frac{1 - e^{n[A(b) - A(a)]}}{1 - e^{A(b) - A(a)}}$$

IV,3.3. Relation entre les fonctions $h_0 + h_1 \varepsilon_{pm}$ et $k_0 + k_1 \varepsilon_{pm}$.

En vue d'une simplification des expressions donnant $\bar{\Delta}^n$ et Δ_M^n , nous allons supposer que le rapport de $h_0 + h_1 \varepsilon_{pm}$ et $k_0 + k_1 \varepsilon_{pm}$ est constant :

$$(4.31) \quad \frac{h_0(\tau) + h_1(\tau) \varepsilon_{pm}}{k_0(\tau) + k_1(\tau) \varepsilon_{pm}} = \lambda$$

Si nous utilisons cette relation dans l'expression de B (4.25) :

$$B(x) = \int_0^x \frac{\lambda [h_0(u) + h_1(u) \varepsilon_{pm}]}{e^{\int_0^u [h_0(u) + h_1(u) \varepsilon_{pm}] du}} du$$

Nous obtenons :

$$B(x) = \lambda \left[-e^{-\int_0^u [h_0(u) + h_1(u) \varepsilon_{pm}] du} \right]_0^x$$

C'est-à-dire :

$$(4.32) \quad B(x) = \lambda [1 - e^{-A(x)}]$$

Si nous utilisons cette relation dans l'expression de Δ_M^n (4.30), nous obtenons :

$$\Delta_M^n = -\lambda + [\Delta_M^0 + \lambda] e^{(n+1)A(b) - nA(a)}$$

Mais ces formules sont valables pour un nombre de cycles relativement grand c'est-à-dire que 1 peut être négligé devant n et nous obtenons donc les formules finales suivantes :

$$(4.33) \quad \left\| \begin{aligned} \Delta_M^n &= -\lambda + [\Delta_M^0 + \lambda] e^{n[A(b) - A(a)]} \end{aligned} \right.$$

$$(4.34) \quad \left\| \begin{aligned} \bar{\Delta}^n &= \bar{\Delta}^0 e^{n[A(b) - A(a)]} \end{aligned} \right.$$

Δ_M^n et $\bar{\Delta}^n$ sont donc les valeurs de Δ_M et $\bar{\Delta}$ d'un élément de volume après un chargement de n cycles pendant lesquels la contrainte appliquée à cet élément varie entre deux valeurs fixes a et b ($a < b$).

Δ_M^0 et $\bar{\Delta}^0$ étant les valeurs initiales.

Nous rappelons que :

$$A(x) = \int_0^x [h_0(u) + h_1(u) \varepsilon_{pm}] du = K_0(x) + K_1(x) \quad \text{pour } x > 0$$

$$A(x) = 0 \quad \text{pour } x \leq 0$$

$$\text{et } \lambda = \frac{h_0 + h_1 \varepsilon_{pm}}{k_0 + k_1 \varepsilon_{pm}}$$

V - RUPTURE EN CHARGEMENT RÉPÉTÉ DE TRACTION-COMPRESSION

V.1. Recherche de l'élément de volume le plus défavorisé

De nombreux travaux sont consacrés à l'étude du problème de la répartition des valeurs extrêmes dans un échantillon de dimension ν , tiré d'une population infinie possédant une densité de probabilité $p(x)$. S'il existe assez peu de résultats dans le cas où ν est petit, une théorie asymptotique a été développée dans le cas où ν est grand. Le travail de base de cette théorie a été fait par Fisher et Tippett [23] et Gumbel [24]. La notion de probabilité des valeurs extrêmes peut se résumer brièvement de la manière suivante :

Si nous supposons que la distribution d'une variable x est donnée par une fonction densité de probabilité continue $p(x)$ associée à la fonction de répartition $P(x)$:

$$(5.1) \quad P(x) = \int_{-\infty}^x p(x') dx'$$

La distribution de la plus grande valeur dans un échantillon de dimension ν , tiré de cette population est alors donnée par la densité de probabilité :

$$(5.2) \quad g_{\nu}(x) = \nu p(x) [P(x)]^{\nu-1}$$

Pour trouver la valeur la plus probable de la plus grande valeur de x , dans un échantillon de dimension ν , il faut chercher le maximum de $g_{\nu}(x)$, c'est-à-dire résoudre :

$$(5.3) \quad g'_{\nu}(x) = 0$$

Si une solution existe, elle peut être écrite sous la forme :

$$p'(x) P(x) = p(x)^2 (\nu-1)$$

Dans le cas d'une répartition Gaussienne de moyenne x_m et d'écart quadratique $\bar{x}$, la valeur la plus probable x^* de la plus grande valeur de x dans un échantillon de dimension ν est donnée par l'expression :

$$(5.4) \quad x^*_{\nu} = x_m + \bar{x} [2 \log \nu]^{\frac{1}{2}} - \bar{x} \frac{\log \log \nu + \log 4\pi}{2[2 \log \nu]^{\frac{1}{2}}}$$

Si nous considérons une éprouvette contenant ν éléments de volume, la valeur la plus probable de la plus grande valeur du paramètre de répartition V dans cette éprouvette est sensiblement donné par l'expression :

$$(5.5) \quad V^*(\nu) = 1 + \bar{V} [2 \log \nu]^{\frac{1}{2}}$$

Ainsi pour une éprouvette de dimension ν , de section constante S , soumise à une force $\vec{F}$, la valeur la plus probable de la plus grande valeur de la contrainte microscopique appliquée à un élément de volume est :

$$(5.6) \quad \nabla^*(\nu) = \frac{F}{S} [1 + \bar{V} (2 \log \nu)^{\frac{1}{2}}]$$

D'autre part, nous avons supposé que les répartitions initiales du paramètre de dommage Δ dans le matériau à l'état « vierge » étaient identiques pour tous les éléments de volume.

Ceci nous permet de dire que « l'élément le plus défavorisé » c'est-à-dire celui qui aura la plus grande valeur du paramètre de dommage après un certain nombre de cycles, sera l'élément soumis à la plus forte contrainte microscopique.

Nous allons donc étudier l'élément de volume soumis à la valeur la plus probable de la plus grande valeur de la contrainte microscopique donnée par l'expression (5.6).

Il nous faut tout d'abord introduire un critère de rupture pour l'élément de volume.

V.2. Critère de rupture d'un élément de volume

Parmi les nombreuses formes de critère de rupture possibles, nous avons choisi une des formes les plus simples :

Critère de rupture :

Le nombre moyen de cycles à rupture d'un élément de volume est atteint lorsque dans cet élément la probabilité pour que Δ soit supérieur à une valeur critique Δ_R , est égale à une constante caractéristique du matériau.

C'est-à-dire :

$$(5.7) \quad \int_{\Delta_R}^{\infty} p(\Delta) d\Delta = Cte$$

Si nous passons en variable réduite et comme nous avons supposé que la densité de probabilité de la variable réduite $\mu = \frac{\Delta - \Delta_M}{\Delta}$ reste toujours identique à elle-même, nous pouvons écrire :

$$(5.8) \quad \int_{\frac{\Delta_R - \Delta_M}{\Delta}}^{\infty} \tilde{p}(\mu) d\mu = Cte$$

C'est-à-dire que pour réaliser cette condition, il suffit que la borne inférieure de l'intégrale soit constante :

$$(5.9) \quad \frac{\Delta_R - \Delta_M}{\Delta} = \mu$$

Si nous utilisons les relations (4.33) et (4.34) donnant les valeurs de $\bar{\Delta}$ et Δ_M après chargement de n_R cycles d'amplitude constante

$$-\lambda + [\Delta_M^{\nu} + \lambda] e^{n_R [A(b) - A(a)]} + \mu \bar{\Delta}^{\nu} e^{n_R [A(b) - A(a)]} = \Delta_R$$

Si nous appelons n_R , le nombre de cycles moyen à rupture de l'élément de volume considéré :

$$(5.10) \quad e^{n_R [A(b) - A(a)]} = \frac{\Delta_R + \lambda}{\Delta_M^{\nu} + \lambda + \mu \bar{\Delta}^{\nu}} = 2$$

Si nous prenons le logarithme de cette expression :

$$n_R = \frac{2}{A(b) - A(a)}$$

C'est-à-dire en explicitant A :

$$(5.11) \quad n_R = \frac{2}{[K_0(b) - K_0(a)] + [K_1(b) - K_1(a)] \epsilon_{pm}}$$

n_R : nombre moyen de cycles à rupture d'un élément de volume soumis à une contrainte variant entre deux valeurs constantes a et b .

Dans le but de simplifier encore cette expression, nous supposons que :

$$(5.12) \quad K_0(\nabla) = d K_1(\nabla)$$

(5.11) devient donc finalement :

$$(5.13) \quad n_R = \frac{2}{[K_0(b) - K_0(a)] [d + \epsilon_{pm}]}$$

V.3. Rupture d'une éprouvette de traction-compression

La rupture d'un élément de volume correspond au début de la fissuration macroscopique. Nous aurions dû faire une étude plus approfondie de ce phénomène, mais en première approximation nous nous sommes basés sur des travaux de **Hunter** et **Fricke** [25] portant sur la détection des différentes phases de la fatigue pour des éprouvettes de traction-compression : première fissure, jonction des fissures, rupture finale.

Il ressort de cette étude que le nombre moyen de cycles à rupture d'une éprouvette est sensiblement proportionnel au nombre moyen de cycles à la détection de la première fissure (fig. 38 et 39).

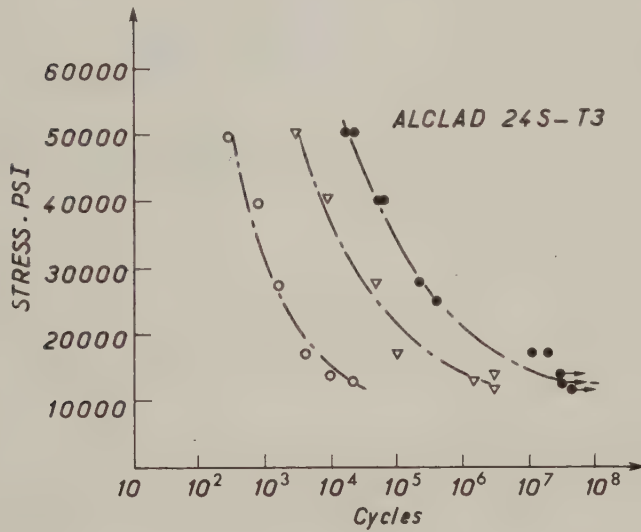
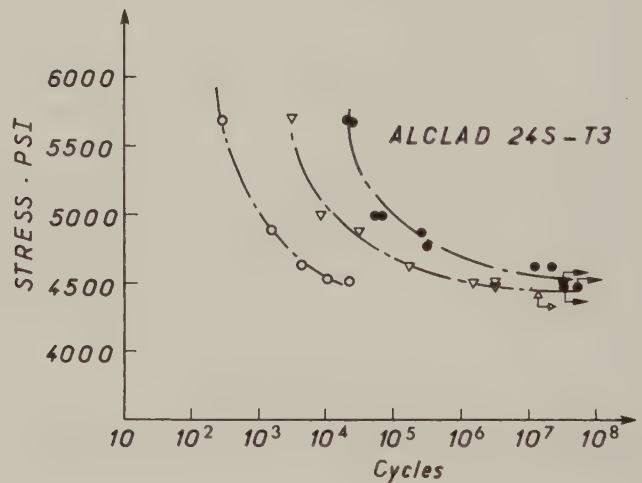


Fig. 39

○ First crack
▽ Crack joining
● Failure



d'après M.S. Hunter et W.G. Fricke, Proc. A.S.T.M., vol. 54

En première approximation, nous admettons donc que si n_R^* est le nombre moyen de cycles à rupture correspondant à l'élément de volume soumis à la valeur la plus probable de la plus grande valeur du paramètre de répartition V^* , le nombre de cycles à rupture de l'éprouvette est donné par :

$$(5.14) \quad N_R = q n_R^*$$

C'est-à-dire :

$$(5.15) \quad N_R = \frac{2q}{[K_0(b^*) - K_0(a^*)][d + \epsilon_{pm}^*]}$$

avec :

$$b^* = b [1 + \sqrt[3]{2 \log \psi}]$$

$$a^* = a [1 + \sqrt[3]{2 \log \psi}]$$

et ϵ_{pm}^* déformation plastique globale de l'élément de volume soumis à la contrainte variant entre a^* et b^* .
 q est un paramètre qui peut tenir compte en particulier des effets de surface ou encore de la corrosion.

VI - APPLICATIONS

Nous ne prétendons pas ici vérifier ce modèle, mais seulement montrer que les expressions obtenues peuvent permettre de rendre compte de certains effets classiques rencontrés en fatigue de traction-compression. D'autre part, l'utilisation d'essais existant dans la littérature n'est guère possible, car nous faisons intervenir la déformation plastique et en général celle-ci est ignorée et non mesurée lors des essais de fatigue classiques, ainsi d'ailleurs que la courbe d'érouissage des matériaux considérés.

VI.1. Courbe de Wöhler

La courbe de Wöhler d'un matériau est la courbe donnant le nombre moyen de cycles à rupture d'une éprouvette en fonction du niveau de charge et pour un profil de chargement donné, c'est-à-dire pour un rapport donné de la charge minimale et de la charge maximale.

Si nous prenons le logarithme de l'expression (5.15), nous obtenons en faisant abstraction des effets de dimensions, c'est-à-dire en posant :

$$a^* = a = \left(\frac{F}{S} \right)_{\min}, \quad b^* = b = \left(\frac{F}{S} \right)_{\max}$$

$$(6.1) \quad \log N_R = \log 29 - \log [K_0(b) - K_0(a)] - \log [d + \epsilon_{pm}]$$

Cette formule est à rapprocher de certaines formules empiriques proposées, et en particulier [26] :

$$(6.2) \quad \log N_R = c - d \log [\sigma^+ - \sigma_e]$$

Si nous notons par σ^+ le niveau maximal de $\frac{F}{S}$.

Notre formule est plus générale et il ne devrait pas y avoir de difficultés pour décrire les courbes de Wöhler.

VI.2. Influence de la contrainte moyenne

Il semble plus intéressant de rendre compte du réseau des courbes de Wöhler obtenu en faisant varier le profil des cycles de chargement, c'est-à-dire en faisant varier le rapport $\frac{a}{b}$.

Dans ce genre d'essais, la littérature est assez prodigue mais la méconnaissance de ϵ_p ne permet pas d'applications quantitatives correctes. C'est le choix de la forme de la fonction K_0 (développement en polynômes par exemple) qui doit permettre de traduire assez correctement les réseaux de courbes de Wöhler avec un nombre relativement réduit de paramètres.

VI.3. Influence d'un érouissage préalable

Il s'agit de pouvoir rendre compte de l'influence d'un érouissage préalable sur la durée de vie en fatigue à un niveau de contrainte donné. Si nous reprenons la formule (5.15) et si nous considérons, bien entendu, un niveau de contrainte de l'érouissage préalable, supérieur au niveau de contrainte du traitement de fatigue, nous obtenons une relation de la forme :

$$(6.3) \quad N_R = \frac{d^e}{d + \epsilon_{pm}}$$

Cette forme semble en général correcte pour les ϵ_p faibles, c'est-à-dire inférieurs à 1 %. Pour les valeurs plus grandes de ϵ_p , il faudrait peut-être pousser le développement des fonctions h et k (4.16) à un ordre plus élevé, ce qui ne doit pas poser de problèmes majeurs.

VI.4. Non commutativité du dommage

Un des effets classiques en fatigue, appelé « over-stressing », consiste en la non commutativité des traitements de fatigue : c'est-à-dire que si l'application d'un nombre n_1 de cycles de profil $(0, b_1)$ par exemple, doit être suivie d'un nombre n_2 de cycles de profil $(0, b_2)$ pour obtenir la rupture ; alors l'application d'un nombre n_2 de cycles $(0, b_2)$ doit être suivie d'un nombre n_1' de cycles $(0, b_1)$ pour parvenir à la rupture avec :

$$(6.4) \quad n'_1 > n_1 \quad \text{si} \quad b_1 > b_2$$

D'après l'expression (5.15) nous pouvons exprimer cette expérience en remarquant que $\varepsilon_{PM1} > \varepsilon_{PM2}$

Si nous appliquons d'abord $(0, b_1)$ puis $(0, b_2)$:

$$\eta q = n_1 K_0(b_1) [d + \varepsilon_{PM1}] + n_2 K_0(b_2) [d + \varepsilon_{PM1}]$$

Et si nous appliquons $(0, b_2)$ puis $(0, b_1)$:

$$\eta q = n_2 K_0(b_2) [d + \varepsilon_{PM2}] + n_1 K_0(b_1) [d + \varepsilon_{PM2}]$$

Nous voyons dans ce cas :

$$\underline{n'_1 > n_1}$$

VI.5. Effet de dimensions

Nous avons vu que la rupture d'une éprouvette dépend de la rupture de l'«élément le plus défavorisé» ; laquelle dépend de la contrainte microscopique agissant sur cet élément, qui est donnée par la relation (5.6) et qui fait intervenir le nombre d'éléments de volume de l'éprouvette considérée. En fait, cette forme ne peut rendre compte que des effets de volume, mais expérimentalement il est difficile d'imaginer des essais qui ne fassent intervenir que le volume d'une éprouvette.

Aussi, si nous supposons que nous négligeons les effets de surface, nous pouvons déterminer les courbes de **Wöhler** de deux types d'éprouvettes d'un même matériau, de diamètre identique afin d'éliminer l'influence de la section, et d'état de surface identique, mais de longueurs différentes l_1 et l_2 . Pour simplifier, nous supposons que nous déterminons ces courbes de **Wöhler** en traction ondulée, c'est-à-dire $a = 0$ et dans une zone où ε_p est négligeable. Pour un même nombre de cycles à rupture, nous connaissons les efforts appliqués à chacun des types d'éprouvette, soit :

$$\left(\frac{F}{S}\right)_1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{F}{S}\right)_2$$

D'après (5.6) et (5.15), nous avons :

$$(6.5) \quad \frac{1 + \sqrt{2 \log v_1}}{1 + \sqrt{2 \log v_2}} = \frac{(F/S)_2}{(F/S)_1} = W_{21}$$

$$\text{Or : } \frac{v_1}{v_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

$$W_{12} = \frac{1 + \sqrt{2 \log \frac{l_1}{l_2} v_2}}{1 + \sqrt{2 \log v_2}}$$

Si nous supposons les termes de type $\sqrt{2 \log v}^{\frac{1}{2}}$ petits :

$$\begin{aligned} W_{21} &= 1 + \sqrt{2} \left[\left(\log \frac{l_1}{l_2} v_2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\log v_2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= 1 + \sqrt{2} \left[\left(1 + \frac{\log l_1/l_2}{\log v_2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \left(\log v_2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

En général v_2 sera toujours très grand devant le rapport $\frac{l_1}{l_2}$: $v_2 \gg \frac{l_1}{l_2}$

$$W_{21} = 1 + \frac{\bar{V}\sqrt{Z}}{2} \frac{\log l_1/l_2}{(\log v_2)^{\frac{1}{2}}}$$

C'est-à-dire :

$$(6.6) \quad v_2 = \exp \left[\frac{\bar{V}^2}{2(W_{21}-1)} (\log l_1/l_2)^2 \right]$$

Ainsi, nous pouvons déterminer la dimension de l'élément de volume de notre milieu hétérogène.

CONCLUSION

Il semble qu'a priori, ce modèle puisse rendre compte d'un certain nombre d'effets apparaissant lors du chargement cyclique de traction-compression des matériaux. L'adoption d'une loi de comportement de l'élément de volume et d'une loi de dommage de type plastique rend ce modèle incapable de décrire certains effets, en particulier celui de la fréquence qui est actuellement encore très controversé. Nous pouvons donc dire que de modèle est applicable dans le domaine des fréquences de chargement courantes.

Nous nous sommes attachés à obtenir des expressions simples permettant une exploitation aisée, c'est-à-dire que sous réserve de quelques complications, certaines hypothèses pourraient être levées et certains développements de fonctions poussés à des ordres plus élevés pour permettre un meilleur accord avec l'expérience. D'autre part, l'étude de la fissuration macroscopique a été simplifiée au maximum par l'adoption d'une relation semi-empirique. Il serait possible d'envisager une étude statistique plus complète (répartition spatiale des éléments de volume rompus et probabilité que plusieurs de ces éléments soient côte à côte).

L'adoption d'un critère de rupture plus élaboré pour l'élément de volume permettrait de rendre compte de la répartition des durées de vie pour un niveau de chargement donné. D'autres aspects du phénomène de fatigue pourraient être envisagés, par exemple l'influence de l'état de surface, de la corrosion, sans parler du passage au cas des champs de contrainte (du milieu continu) non constants et de la fatigue sous chargements complexes.

Dans notre cas très particulier, la vérification complète du modèle demande déjà de nombreux essais, qu'il n'était pas possible d'envisager dans le cadre de cette thèse et l'utilisation des essais de la littérature est en général impossible, sauf dans le cas de vérifications très partielles.

Manuscrit remis le 26 février 1971.



ANNEXE

Définissons un produit scalaire tel que :

$$a(x,y) * b(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} p(x,y) a(x,y) b(x,y) dx dy$$

Nous pouvons lui associer une norme en posant :

$$\|a(x,y)\| = [a(x,y) * a(x,y)]^{\frac{1}{2}}$$

Et en appliquant l'inégalité de **Schwarz** :

$$|a(x,y) * b(x,y)| \leq \|a(x,y)\| \cdot \|b(x,y)\|$$

C'est-à-dire par exemple :

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{+\infty} (\Delta - \Delta_n)^m (\epsilon_p - \epsilon_{pn})^n p(\Delta, \epsilon_p) d\Delta d\epsilon_p \leq \\ & \left[\iint_{-\infty}^{+\infty} (\Delta - \Delta_n)^{2m} p(\Delta, \epsilon_p) d\Delta d\epsilon_p \right]^{\frac{1}{2}} \left[\iint_{-\infty}^{+\infty} (\epsilon_p - \epsilon_{pn})^{2n} p(\Delta, \epsilon_p) d\Delta d\epsilon_p \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Si nous supposons que l'écart quadratique $\overline{\epsilon_p}$ de la répartition des déformations plastiques dans un élément de volume est petit par rapport à l'écart quadratique $\overline{\Delta}$ de la répartition de dommage, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \left[E[(\Delta - \Delta_n)^2] \right]^{\frac{1}{2}} &= \sigma(x) \\ \left[E[(\epsilon_p - \epsilon_{pn})^2] \right]^{\frac{1}{2}} &= \sigma(x^2) \end{aligned}$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} (\Delta - \Delta_n)^m (\epsilon_p - \epsilon_{pn})^n p(\Delta, \epsilon_p) d\Delta d\epsilon_p \leq \sigma(x^{m+2n})$$

Si nous négligeons les termes petits d'ordre trois, c'est-à-dire lorsque :

$$m + 2n \geq 3$$

Dans ce cas, nous pouvons négliger les expressions suivantes :

$$\left| \begin{aligned} E[(\Delta - \Delta_n)(\epsilon_p - \epsilon_{pn})] &\simeq 0 \\ E[(\Delta - \Delta_n)(\epsilon_p - \epsilon_{pn})^2] &\simeq 0 \\ E[(\Delta - \Delta_n)^2(\epsilon_p - \epsilon_{pn})] &\simeq 0 \\ E[(\epsilon_p - \epsilon_{pn})^2] &\simeq 0 \end{aligned} \right.$$

RÉFÉRENCES

- [1] BROWN A.F. - *Advances in Physics*, vol. 1 (1952), p. 427
- [2] BOAS W. and HARGREAVES M.E. - *Proc. Royal Soc.*, vol. 193 (1948), p. 89.
- [3] BOAS W. and OGILVIE G.J. - *Acta Met.* vol. 2 (1954), p. 655.
- [4] SMITH G.C. - *Proc. Royal Soc.*, vol. 242 (1957), p. 189.
- [5] RONAY M. - *Columbia Univ. T.N.* 9 (1964).
- [6] WOOD W.A. - *Acta Met.*, vol. 11 (1963), p. 643.
- [7] MAZET R. - *Sur la normalité de la fonction de fluage lors d'essais de traction d'un dural à 200° C.* Symposium IUTAM sur la thermo-inélasticité. Glasgow, juin 1968.
- [8] ZARKA J. - *Sur la viscoplasticité des métaux.* Thèse, Paris, 1968.
- [9] BUI HUY DUONG - *Etude de l'évolution de la frontière du domaine élastique avec l'écrouissage et relations de comportement élasto-plastique des métaux cubiques.* Thèse, Paris, 1969.
- [10] SCHÄCHTER S. - *Théorie statistique à deux paramètres de la fatigue des matériaux.* Thèse, Paris, 1968.
- [11] ESIN A. and JONES W.J. - *Nucl. Eng. and Design.*, vol. 4 (1966), p. 292.
- [12] JAOUL B. - *Etude de la plasticité.* Dunod, Paris 1965.
- [13] FLEISHER R.L. and BACKOFEN W.A. - *M.I.T. Met. Report* 9.7 (1958).
- [14] PASKOV P.O. - *Journal Tech. Phys. (USSR)*, vol. 23 (1953), p. 2013.
- [15] CHECHULIN B.E. - *Fiz. Metallov i Metalloved.*, vol. 1 (1955), p. 246.
- [16] ESIN A. and JONES W.J. - *J. Strain Anal.*, vol. 1 (1966), p. 415.
- [17] FRIEDEL J. - *Symp. on Internal Stress.* Detroit, sept. 1958.
- [18] HAUSSEGUY L. et MARTINOD H. - *Etude expérimentale de l'altération par la fatigue de la courbe contraintes-déformations d'éprouvettes en duraluminium.* Note Technique O.N.E.R.A. n° 7, (1952).
- [19] BROOM T. and HAM R.K. - *Proc. Royal Soc.*, vol. 242 (1957), p. 166.
- [20] MORCHOISNE Y. - *Contribution à l'étude de l'écrouissage des matériaux métalliques.* Thèse, Paris, 1969.
- [21] HERLESCU T. and BERNATH A. - *Revue Roumaine Sc. Tech., série Met.*, vol. 12 (1967), p. 269.
- [22] FROST N.E. and DUGDALE D.S. - *J. Mech. and Phys. Sol.*, vol. 6 (1958), p. 92.
- [23] FISHER R.A. and L.H.C. TIPPETT - *Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 24 (1928), p. 180.
- [24] GUMBEL E.J. - *Ann. Math. Statistics*, vol. 12 (1941), p. 163.
- [25] HUNTER M.S. and FRICKE W.G. - *Proc. A.S.T.M.*, vol. 54 (1954), p. 717.
- [26] YOKOBORI T. - *Strength, fracture and fatigue of metals.* Noordhoff (1965).



